В. С. Буслаев

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

В. С. БУСЛАЕВ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов физико-математических специальностей
высших учебных заведений*



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД, 1980

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 519.3

Буслаев В. С. **Вариационное исчисление:** Учеб. пособие. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 288 с. Ил. — 31, библиогр. — 39 назв.

В учебном пособии, выпускаемом с грифом Минвуза СССР, изложены начала вариационного исчисления и его приложения к механике, теоретической и математической физике. Главное внимание уделено формульной и геометрической сторонам вариационного исчисления.

Ориентировано в первую очередь на студентов-физиков университетов. Оно может быть также полезно студентам математических специальностей.

Рецензенты: Московский физико-технический институт, кафедра высшей математики,
доктор физ.-мат. наук *Ф. А. Березин*

Б $\frac{20203-3}{076(02)-80}$ 80—79. 1702050000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга содержит учебный материал по классическим разделам вариационного исчисления: в ней излагаются основы вариационного исчисления и описываются его связи с теорией дифференциальных уравнений, механикой, геометрией, математической и теоретической физикой. Книга основана на лекциях, которые в рамках общего курса «Методы математической физики» читались автором студентам физического факультета Ленинградского университета. Помимо материала, который обычно включается в общий курс, здесь изложен также ряд вопросов вариационного исчисления, рассматриваемых, как правило, в специальных курсах. При отборе материала автор руководствовался в первую очередь стремлением удовлетворить запросы студентов, специализирующихся в области теоретической и математической физики. Автор надеется, однако, что учебник окажется полезным и для студентов других физико-математических специальностей.

Читатель, знакомый с вариационным исчислением, увидит, что предпочтение отдано геометрическим и формульным вопросам. Имеет смысл отметить темы, которые уместны в книге, названной «Вариационное исчисление», но которых здесь нет. В этой книге отсутствуют все разделы вариационного исчисления, которые зависят от теории функций вещественной переменной. Как следствие, интегральные функционалы, аргументами которых являются функции нескольких переменных, в том числе квадратичные функционалы, рассматриваются только в формульном плане. Отсутствие указанных разделов соответствует замыслу учебника, но здесь, к сожалению, нет и ряда тем, созвучных с этим замыслом. Из них прежде всего должна быть упомянута теория вырожденных лагранжианов. В последние годы она привлекла внимание физиков, так как стало ясно, что лагранжианы многих интересных физических полей вырождены. Общая теория вырожденных лагранжианов не достигла, однако, такого состояния, чтобы ее можно было включить в учебник. В порядке компенсации довольно подробно рассмотрен важный специальный случай: теория функционалов, аргументами которых являются не функции, а кривые. Современный физик-теоретик не может рассматривать вариационное исчисление вне связей с континуальными интегралами Фейнмана. Хотя описание этих связей вполне созрело для элементарного учебника и посвященная им глава уже была написана, ее пришлось исключить, так как книга вышла за рамки допустимого объема. И наконец, здесь почти ничего не сказано об увлекательной и поучительной истории вариационного исчисления, которое развивалось в тесной связи с механикой, оптикой и геометрией, а в последние десятилетия — также с квантовой механикой и теорией управления. Из этой трудной темы чита-

тель найдет в книге лишь краткое описание основных этапов в развитии вариационного исчисления и упоминание о ряде отдельных эпизодов.

Для понимания книги необходимо знакомство с началами анализа в объеме курсов, которые читаются на факультетах с расширенной математической программой. Кроме того, предполагаются известными основные факты линейной алгебры. Относительно более деликатные сведения, например некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях, напоминаются. Текст, данный петитом, не обязателен для понимания дальнейшего.

Без дополнительных пояснений будут использоваться нижеследующие обозначения: $A \cup B$ — объединение множеств A и B; $A \cap B$ — их пересечение; запись $a \in A$ означает, что a — элемент множества A; $A \subset B$ означает, что элементы множества A принадлежат множеству B; $A \times B$ — множество, элементами которого являются упорядоченные пары (a, b), $a \in A$, $b \in B$; $A = \{a: \ldots\}$ — множество элементов a, описание которых занимает место, отмеченное здесь многоточием.

Если f — функция (отображение), то $f(x)$, как правило, будет обозначать лишь значение f в точке x. Иногда все же запись $f(x)$ будет использоваться в духе классической традиции и для обозначения самой функции; аргумент в этом случае выписывается для того, чтобы условиться об обозначающей его букве. Наряду с символом f функция будет обозначаться также $x \to f(x)$; эту запись следует воспринимать как единый символ. Запись $f: E_1 \to E_2$ означает, что f есть функция, заданная на множестве E_1 и принимающая значения во множестве E_2. Аналогично выражение «отображение $E_1 \to E_2$» означает, что речь идет об отображении (функции), заданном на E_1 и принимающем значения в E_2. Функция f от пары (и подобным же образом от большего числа) аргументов, т. е. функция, заданная на множестве вида $A \times B$, будет обозначаться также $f(x, y)$ или $(x, y) \to f(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$. Символ $f(\cdot, y)$ и равносильная ему запись $x \to f(x, y)$ обозначают функцию на A, принимающую в точке x значение $f(x, y)$; точка y считается при этом фиксированной. Соотношение $f = 0$, где f — функция на множестве A, означает, что $f(x) = 0$ при всех $x \in A$. Соотношение $f(x) = 0$ означает, что значение f в некоторой точке x равно нулю. Аналогично следует толковать неравенства $f > 0$ и $f(x) > 0$.

Автор благодарен Ф. А. Березину, Л. Д. Кудрявцеву и М. В. Федорюку за внимательное рецензирование рукописи. Под влиянием их отзывов, в особенности под влиянием отзыва Ф. А. Березина, в изложение ряда вопросов были внесены существенные изменения.

ВВЕДЕНИЕ

Исходные понятия вариационного исчисления: интегральный функционал, его дифференциал, или вариация, его стационарная точка и точка экстремума (точка минимума или максимума). Простейший интегральный функционал представляет собой отображение вида

$$I(f)=\int_a^b L(t,\ f(t),\ f'(t))\,dt,$$

где $L(t, x, v)$ — заданная на множестве $\{(t, x, v): t \in [a, b], x, v \in \mathbf{R}\}$ функция. Аргументом функционала I является функция $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, а его значения — вещественные числа. Первое, что отличает функционал I от привычных читателю из начал анализа отображений $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, — это бесконечномерность пространства аргументов, рассматриваемого как векторное пространство. Трудности, вызванные указанной особенностью задачи, оказываются, однако, не слишком глубокими: можно представить основные понятия дифференциального исчисления в такой форме, что они не будут зависеть от размерности пространства и будут сводиться к привычным для отображений $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$. Стационарная точка функционала I — это такая функция, такое значение аргумента функционала, при котором обращается в нуль его дифференциал. Между стационарными точками и точками экстремума функционала существует связь, знакомая читателю в случае отображений $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$. Значительная часть и многих других исходных построений вариационного исчисления имеет образцы в теории экстремумов дифференцируемых функций $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ и не зависит от специфики интегральных функционалов. Но не эти построения составляют, конечно, основное содержание вариационного исчисления. Основное содержание вариационного исчисления существенно зависит от специфики интегральных функционалов, которая проявляется прежде всего в том, что стационарные точки интегрального функционала могут

быть охарактеризованы как решения некоторой краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$L_x(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt} L_v(t, f(t), f'(t)) = 0,$$

обычно называемого уравнением Эйлера. В общих построениях вариационного исчисления и в приложениях аргументом интегрального функционала чаще оказывается не функция $f: \Delta \to \mathbf{R}$, а вектор-функция $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}^n$. В таком случае стационарные точки функционала характеризуются системой дифференциальных уравнений, системой уравнений Эйлера. Система уравнений Эйлера — далеко не общая система дифференциальных уравнений и ее теория чрезвычайно богата в формульном и геометрическом отношении.

Первые общие построения, которые превратили вариационное исчисление в самостоятельную область математики, относятся к середине XVIII в. и принадлежат Эйлеру и Лагранжу. В создании того, что теперь принято называть классическим вариационным исчислением, участвовали также Лежандр и многие математики XIX в.: Пуассон, Вейерштрасс, Остроградский, Гамильтон, Якоби и др. Основным направлением, по которому шло развитие вариационного исчисления, было выяснение связей между точками экстремума функционала и решениями дифференциальных уравнений. Эта идея была доведена до получения достаточных условий экстремума для простейших функционалов.

В работах Гамильтона сложилась новая линия: было положено начало изучению некоторых множеств решений уравнений Эйлера, так называемых полей экстремалей. Вместе с полями экстремалей в теорию вошел новый объект — уравнение в частных производных — уравнение Гамильтона — Якоби, которое канонически сопоставляется интегральному функционалу. Поля экстремалей и уравнение Гамильтона — Якоби были первоначально открыты Гамильтоном в оптике: поля экстремалей возникли при этом как множества лучей, испускаемых, например, точечным источником; функция, описывающая движение фронта соответствующей волны, удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби. Теория полей экстремалей отражала специфику, выделенность уравнений Эйлера. Она получила в дальнейшем значительное развитие, которое активно продолжается и в наше время в большой степени благодаря связям с квантовой механикой, в самом открытии которой в 20-х годах нашего века теория полей экстремалей сыграла яркую роль.

Работы Гамильтона и Якоби внесли также значительную ясность и в так называемые вариационные принципы механики, которые позволяют толковать дифференциальные уравнения движения механической системы как уравнения Эйлера для некоторого интегрального функционала, характеризующего систему. Исследование вариационных принципов механики с самого начала проходило параллельно с развитием вариационного исчисления как

математической дисциплины. Позднее, уже в XX в., связь вариационного исчисления с механикой обогатилась еще одним принципиальным достижением: средствами вариационного исчисления было показано, что некоторые свойства симметрии механических систем порождают законы сохранения (теорема Нетер). К числу таких законов сохранения принадлежат законы сохранения энергии, импульса и т. д. В 50-х годах XX в. вскрылся источник вариационных принципов механики, были открыты представления решений уравнений квантовой механики в виде континуальных интегралов, которые в пределе, соответствующем вырождению квантовой механики в классическую, непосредственно приводят к вариационным принципам. Следует отметить также, что вариационное исчисление снабжает механику универсальным языком, который позволяет с равным успехом описывать физические динамические системы очень разной природы, в том числе системы с бесконечным числом степеней свободы (поля).

В середине XIX в. внимание математиков привлекла возможность использовать вариационное исчисление с целью доказательства разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и в частных производных). Здесь должны быть упомянуты Гаусс, Дирихле, Риман и Вейерштрасс. Реализовать эти идеи удовлетворительным образом применительно к задаче Дирихле для уравнения Лапласа смог, однако, только Гильберт к 1900 г., когда математический анализ достиг достаточного для этих целей уровня. Так было положено начало третьему основному направлению вариационного исчисления — прямым методам вариационного исчисления. Прямые методы как теоретическое направление развивались параллельно с применением вариационного исчисления к численным методам решения краевых задач для дифференциальных уравнений. В современном численном анализе вариационные методы играют важную роль.

ГЛАВА I

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

§ 1. Первая вариация Необходимые условия экстремума

1. Интегральные функционалы. Основным объектом вариационного исчисления является *интегральный функционал*. Простейшие интегральные функционалы (стандартнсе обозначение — I) задаются формулами вида

$$I(f)=\int_\Delta L(t,\ f(t),\ f'(t))\,dt.$$

Они рассматриваются как отображения $f\to I(f)$, определенные на некотором множестве Ω функций f: $\Delta\to\mathbf{R}$ ($\Delta=[a,\ b]\subset\mathbf{R}$ — фиксированный интервал) и принимающие значения в множестве $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Вещественнозначная функция $L(t,\ x,\ v)$, $(t,\ x,\ v)\in\Delta\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\subset\mathbf{R}^3$, считается в этой конструкции заданной, ее выбор и определяет интегральный функционал.

Термин *функционал* обычно используется для наименования отображений, принимающих, так же, как и функции, числовые значения. В некоторых случаях он используется потому, что термин *функция* бывает занят для других, в некотором смысле подчиненных, объектов (в вариационном исчислении — аргументов функционала). В ряде случаев предпочитают говорить о функционалах, а не о функциях, в силу сложившихся традиций.

Введенный интегральный функционал в дальнейшем обычно будет рассматриваться как частный случай интегрального функционала, определенного на некотором множестве Ω *вектор-функций* $\mathbf{f}$: $\Delta\to\mathbf{R}^n$, т. е. отображений интервала Δ в пространство $\mathbf{R}^n$.

Задание вектор-функции эквивалентно заданию n функций f_i, $i=1,\ \ldots,\ n$, на интервале Δ со значениями в $\mathbf{R}$: $\mathbf{f}(t)=(f_1(t),\ \ldots,\ f_n(t))\in\mathbf{R}^n$, $t\in\Delta$. Функции f_i будут называться *координатами* вектор-функции $\mathbf{f}$. Отображение $\mathbf{f}$ будет считаться непрерывным (непрерывно дифференцируемым), если непрерывны (непрерывно дифференцируемы) на Δ координаты f_i. При этом под производной непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{f}$

будет пониматься отображение $\mathbf{f}'\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$, определяемое формулой $\mathbf{f}'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_n'(t))$. Множество всех непрерывных вектор-функций (короче — функций) $\mathbf{f}\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ будет обозначаться $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, множество всех непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{f}\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ будет обозначаться $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Условимся сокращать эти обозначения при $n = 1$ следующим образом: $C(\Delta \to \mathbf{R}) = C(\Delta)$, $C^1(\Delta \to \mathbf{R}) = C^1(\Delta)$.

Интегральный функционал I на множестве вектор-функций $\mathbf{f}$ определяется прежней формулой

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt, \tag{1}$$

в которой функция $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ считается теперь заданной на некотором подмножестве множества $\Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n+1}$.

Множество Ω функций $\mathbf{f}$, на которых определен интегральный функционал I (короче — *функционал* I), называется *областью определения* функционала. Как правило, будет предполагаться, что L — непрерывная функция всюду на $\Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, тогда в качестве области определения Ω можно взять множество $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. В таком случае будем говорить, что I — *интегральный функционал на множестве* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. При высказанных условиях функция $L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$, где $\mathbf{f}$ — заданный элемент из $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, есть непрерывная функция на Δ, так что интеграл $I(\mathbf{f})$ благополучно определен. В приложениях функция L нередко бывает задана лишь на некотором подмножестве U пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$. Если L — непрерывная функция на U, то в качестве области определения Ω функционала I можно взять множество функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющих условию $(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) \in U$ при всех $t \in \Delta$. Конечно, имеет смысл рассматривать только такие U, для которых множество Ω не пусто.

Вариационное исчисление развилось из задачи об отыскании *точек минимума* и *точек максимума* интегрального функционала I (собирательно — *точек экстремума*), т. е. таких функций $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in \Omega$, которые сообщают функционалу I наименьшее и наибольшее значения. Теория точек экстремума для интегральных функционалов оказалась тесно связанной с теорией дифференциальных уравнений.

Пусть

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}_0(t), \mathbf{x}) + (\mathbf{g}_1(t), \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$ — некоторые функции, $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1 \in C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, а внешние скобки с запятой обозначают *скалярное произведение* в $\mathbf{R}^n$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Тогда функционал I имеет вид

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta [(\mathbf{g}_0(t), \mathbf{f}(t)) + (\mathbf{g}_1(t), \mathbf{f}'(t))]\, dt. \tag{2}$$

Его можно считать заданным на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Функционал (2) обладает свойством линейности:

$$I(\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2) = \alpha_1 I(\mathbf{f}_1) + \alpha_2 I(\mathbf{f}_2), \tag{3}$$

здесь $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. В дальнейшем функционалы вида (2) будут называться *линейными интегральными функционалами* на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. В силу свойства линейности функционалы вида (2) не имеют наименьшего и наибольшего значений. Для типичных интегральных функционалов вариационного исчисления характерна нелинейность функции L по второму и третьему аргументам.

2. Примеры. В нижеследующих примерах $n=1$.

1) Если $L(t, x, v) = x$, то

$$I(f) = \int_\Delta f(t)\, dt.$$

Этот линейный интегральный функционал хорошо известен читателю под названием *определенного интеграла* от функции f по интервалу Δ.

2) Если $L(t, x, v) = (1+v^2)^{1/2}$, то

$$I(f) = \int_\Delta (1 + f'^2(t))^{1/2}\, dt. \tag{4}$$

Этот функционал допускает простую геометрическую интерпретацию: $I(f)$ — длина *графика функции* f, т. е. кривой в $\mathbf{R}^2$, множество точек которой имеет вид $(t, f(t))$, $t \in \Delta$. Если выбрать $\Omega = C^1(\Delta)$, то функционал (4) будет иметь наименьшее значение, равное $|\Delta| = b - a$, которое достигается на всех постоянных функциях.

Обозначим через $C^1_{\xi\eta}(\Delta)$ (ξ, η — фиксированные вещественные числа) множество функций f из $C^1(\Delta)$, граничные точки графиков которых заданы:

$$f(a) = \xi, \quad f(b) = \eta.$$

Ограничим функционал (4) на множество $C^1_{\xi\eta}(\Delta)$. Он будет иметь на нем наименьшее значение, равное расстоянию $[(a-b)^2 + (\xi - \eta)^2]^{1/2}$ между точками (a, ξ) и (b, η) на $\mathbf{R}^2$. Оно достигается на функции

$$f(t) = \xi + (\eta - \xi)\frac{t-a}{b-a},$$

график которой — прямолинейный отрезок, соединяющий (a, ξ) и (b, η).

Рассмотренный пример при всей своей элементарности хорошо иллюстрирует многие положения вариационного исчисления, и мы не раз будем к нему возвращаться.

3) Наиболее известной конкретной задачей вариационного исчисления является *задача о брахистохроне*, исторически первая задача, привлекшая внимание к точкам минимума интегральных функционалов и к их связям с дифференциальными уравнениями. Брахистохрона — кривая скорейшего спуска. Задача о брахистохроне заключается в следующем: требуется отыскать форму проволочки, которая расположена в вертикальной плоскости и соединяет две заданные точки так, что соскальзывающая по проволочке без трения под действием силы тяжести бусинка пробегает проволочку за наименьшее время. Предполагается, что из начальной точки бусинка выпускается с заданной скоростью.

Введем на плоскости декартовы координаты: ось t горизонтальна, ось x направлена вертикально вниз. Пусть заданные точки имеют координаты (a, ξ),

(b, η), а форма проволочки совпадает с графиком функции f: $x = f(t)$, $t \in \Delta = [a, b]$. На движение вдоль проволочки бусинка тратит время

$$\int_\Delta \frac{(1+f'^2(t))^{1/2}}{v(f(t))}\,dt.$$

Здесь $v(x) = (E+x)^{1/2}$ — скорость бусинки на высоте x, которая вычислена с помощью интеграла энергии $v^2(x) - x = E$. Постоянная E зависит от начальной скорости $v(\xi)$ бусинки и выбора нуля на оси x: $v^2(\xi) - \xi = E$. Выбор нуля можно согласовать с начальной скоростью, потребовав, чтобы $E = 0$; тогда $v(x) = \sqrt{x}$. Таким образом, время движения бусинки равно

$$I(f) = \int_\Delta \frac{(1+f'^2(t))^{1/2}}{\sqrt{f(t)}}\,dt. \tag{5}$$

Эти построения имеют непосредственный смысл, если скорость $v(f(t))$ всюду положительна: $f(t) > 0$ при $t \in \Delta$. Последнее условие означает, в частности, что $v(\xi) > 0$ и $\eta - \xi > -v^2(\xi)$. Аннулирование скорости $v(f(t))$ в некоторых точках t также допустимо, но интеграл $I(f)$ приходится рассматривать при этом как *несобственный*, требуя от f в выделенных точках поведения, обеспечивающего его сходимость. Мы не будем в дальнейшем обсуждать этот особый случай, но читатель должен иметь в виду, что решение задачи о брахистохроне при $v(\xi) = 0$ и $\eta \geq \xi$ может быть получено предельным переходом $v(\xi) \to 0$ из решения, отвечающего случаю $v(\xi) > 0$.

Функционал (5) соответствует функции $L(t, x, v) = x^{-1/2}(1+v^2)^{1/2}$. Функция L определена и непрерывна при $x > 0$. В качестве Ω следует выбрать множество функций из $C^1(\Delta)$, графики которых расположены в полуплоскости $x > 0$: $f(t) > 0$, $t \in \Delta$. Задача о брахистохроне — это задача отыскания точки минимума функционала I, рассматриваемого на множестве $C^1_{\xi\eta}(\Delta)$. В дальнейшем, в п. 16, в явном виде будет найдено полное решение этой задачи.

3. Нормированные векторные пространства. Сопоставим задачу отыскания точек экстремума интегрального функционала I с хорошо знакомой читателю из начал анализа задачей отыскания точек экстремума функции u: $D \to \mathbf{R}$, D — множество на $\mathbf{R}^k$. Основная теорема относительно точек экстремума функции u утверждает:

Если $\mathbf{a} \in D$ — *внутренняя точка локального экстремума функции u* и *u дифференцируема в точке* $\mathbf{a}$, *то* $\mathbf{a}$ — *критическая точка функции u.*

Напомним, что $\mathbf{a}$ *называется внутренней точкой, если она обладает окрестностью, принадлежащей D. Точка* $\mathbf{a}$ *называется точкой локального экстремума, если функция u, ограниченная на какую-либо окрестность U этой точки, принимает в ней наименьшее или наибольшее значение*:

$$u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{a}) \quad \textit{или} \quad u(\mathbf{x}) \leq u(\mathbf{a}), \ \mathbf{x} \in U.$$

Точка $\mathbf{a}$ *называется критической точкой функции u, если дифференциал функции u равен нулю в точке* $\mathbf{a}$:

$$du(\mathbf{a}, \mathbf{h}) = 0, \quad \mathbf{h} \in \mathbf{R}^k.$$

Целью настоящего параграфа является установление подобной теоремы для интегральных функционалов. Прежде всего нам необходимо понятие точки локального экстремума. Оно основывается

на понятии окрестности. Таким образом, для множеств, на которых задаются интегральные функционалы, должно быть введено понятие окрестности точки, т. е. *окрестности функции*. Для того чтобы перенести на интегральные функционалы начальные понятия дифференциального исчисления, необходимо задать на множестве функций — аргументов функционала — *структуру векторного пространства*. Понятие окрестности и структура векторного пространства естественным образом сочетаются в так называемых *нормированных векторных пространствах*. В полном объеме значение последнего понятия в задачах вариационного исчисления прояснится в следующей главе, но само определение мы введем уже здесь.

Предполагая, что читатель знаком с понятием *векторного пространства*, лишь напомним, что *множество E называется* (вещественным) *векторным пространством, если для его элементов установлены две удовлетворяющие определенной совокупности аксиом операции*:

1) *операция сложения, сопоставляющая паре элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *множества E третий, называемый их суммой и обозначаемый* $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ *или* $\mathbf{y}+\mathbf{x}$;

2) *операция умножения на скаляр, сопоставляющая произвольному вещественному числу* α *и элементу* $\mathbf{x}$ *новый элемент пространства E, называемый их произведением и обозначаемый* $\alpha\mathbf{x}$ *или* $\alpha\cdot\mathbf{x}$.

Элементы векторного пространства обычно называют *точками* или *векторами*. Мы не будем повторять аксиом векторного пространства, отметим лишь, что в каждом векторном пространстве имеется *нулевой вектор* 0 (короче — нуль), который не отличают в обозначениях от числа нуль.

Векторное пространство E называется нормированным (векторным пространством), *если каждому вектору* $\mathbf{x}$ *сопоставлено число* $\|\mathbf{x}\|$, *называемое нормой вектора* $\mathbf{x}$, *причем соответствие* $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|$ *удовлетворяет ряду аксиом, аксиом нормы. Аксиомы нормы таковы*:

1) $\|\mathbf{x}\|\geqslant 0$ (*положительность*),

2) $\|\mathbf{x}\|=0$ *равносильно* $\mathbf{x}=0$ (*невырожденность*),

3) $\|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ (*однородность*),

4) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leqslant\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (*неравенство треугольника*).

Норма есть формализация известного из аналитической геометрии понятия *длины вектора*. Это обстоятельство позволяет пользоваться в обращении с нормой навыками, приобретенными читателем в аналитической геометрии в отношении длины вектора.

Векторное подпространство нормированного пространства также нормированное пространство.

Примеры.

Примером нормированного пространства является пространство $\mathbf{R}^n$. Норма вектора $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ задается формулой

$$\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x},\ \mathbf{x})^{1/2}=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}.$$

Из аксиом нормы в специальном доказательстве нуждается только неравенство треугольника. Это доказательство, конечно, известно читателю из курса линейной алгебры.

Из линейной алгебры читателю известно также, что пространство $\mathbf{R}^n$ является примером так называемых *конечномерных* векторных пространств. Пространства, не являющиеся конечномерными, называются *бесконечномерными*. В нижеследующих примерах появляются характерные для вариационного исчисления бесконечномерные нормированные пространства, элементами которых являются функции (*функциональные пространства*). В дальнейшем их список будет пополняться.

1) Простейшим функциональным пространством, с которым мы будем иметь дело, является пространство $C(\Delta)$. Его элементами являются функции, принадлежащие множеству $C(\Delta)$. Операции сложения и умножения на число определяются стандартным образом, а норма дается формулой

$$\|f\| = \sup_{t \in \Delta} |f(t)|.$$

В силу известной теоремы Вейерштрасса $\sup\limits_{t \in \Delta} |f(t)|$ достигается в какой-либо точке интервала Δ, поэтому

$$\|f\| = \max_{t \in \Delta} |f(t)|.$$

Как и в предыдущем примере, в проверке нуждается только неравенство треугольника:

$$\|f+g\| = \sup_{t \in \Delta} |f(t)+g(t)| \leqslant \sup_{t \in \Delta} (|f(t)|+|g(t)|) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t \in \Delta} |f(t)| + \sup_{t \in \Delta} |g(t)| = \|f\| + \|g\|.$$

Совпадение обозначения нормированного пространства $C(\Delta)$ с обозначением множества составляющих его функций не создает трудностей.

2) Более важным для дальнейшего примером нормированного пространства является пространство $C^1(\Delta)$. Его элементы — функции из множества $C^1(\Delta)$, норма определяется выражением

$$\|f\| = \sup_{t \in \Delta} |f(t)| + \sup_{t \in \Delta} |f'(t)|.$$

3) Нормированное пространство $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ — обобщение пространства $C(\Delta)$. Его элементами являются функции из множества $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, векторные операции определяются естественным образом:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(t) = (f_1(t)+g_1(t), \ldots, f_n(t)+g_n(t)),$$
$$(\alpha\mathbf{f})(t) = (\alpha f_1(t), \ldots, \alpha f_n(t)),$$
$$\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C(\Delta \to \mathbf{R}^n), \ \alpha \in \mathbf{R},$$

норма дается формулой

$$\| \mathbf{f} \|_{C(\Delta \to \mathbf{R}^n)} = \sup_{t \in \Delta} \| \mathbf{f}(t) \|_{\mathbf{R}^n} \text{*}.$$

Проверим неравенство треугольника:

$$\| \mathbf{f} + \mathbf{g} \|_{C(\Delta \to \mathbf{R}^n)} = \sup_{t \in \Delta} \| \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) \|_{\mathbf{R}^n} \leqslant \sup_{t \in \Delta} (\| \mathbf{f}(t) \|_{\mathbf{R}^n} + \| \mathbf{g}(t) \|_{\mathbf{R}^n}) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t \in \Delta} \| \mathbf{f}(t) \|_{\mathbf{R}^n} + \sup_{t \in \Delta} \| \mathbf{g}(t) \|_{\mathbf{R}^n} = \| \mathbf{f} \|_{C(\Delta \to \mathbf{R}^n)} + \| \mathbf{g} \|_{C(\Delta \to \mathbf{R}^n)}.$$

4) Нормированное пространство $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ — обобщение пространства $C^1(\Delta)$. Его элементы — функции из множества $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, норма определяется выражением

$$\| \mathbf{f} \|_{C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)} = \sup_{t \in \Delta} \| \mathbf{f}(t) \|_{\mathbf{R}^n} + \sup_{t \in \Delta} \| \mathbf{f}'(t) \|_{\mathbf{R}^n}.$$

4. Расстояние. Окрестность. Сопоставляя паре $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ элементов нормированного пространства число $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| = \| \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y} \|$, нетрудно убедиться, что справедливы утверждения:

1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$ (*положительность*),

2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ *равносильно* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (*невырожденность*),

3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (*симметричность*),

4) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ *для произвольного* $\mathbf{z}$ (*неравенство треугольника*).

Множество E, упорядоченной паре $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *элементов которого сопоставлено вещественное число* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *удовлетворяющее условиям* 1)—4), *называется метрическим пространством*. Число $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется *расстоянием* между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а условия 1)—4) — *аксиомами расстояния*.

Всякое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое, полагая $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$. Всякое подмножество метрического пространства само является метрическим пространством, поэтому, в частности, всякое подмножество нормированного пространства является метрическим пространством. Именно так, как подмножества нормированных пространств, которые не являются, вообще говоря, векторными подпространствами и тем самым нормированными пространствами, будут обычно появляться в дальнейшем метрические пространства. Простым, но характерным примером является поверхность в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $\mathbf{a}$ — элемент метрического пространства E. *Множество элементов* $\mathbf{x}$ *пространства E, удовлетворяющих соотношению* $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon$ *при некотором* $\varepsilon > 0$, *называется окрестностью* (подробнее, *ε-окрестностью*) *элемента* $\mathbf{a}$. В $\mathbf{R}^3$ ε-окрестность элемента $\mathbf{a}$ — внутренность шара, имеющего центр в точке $\mathbf{a}$ и радиус ε.

---

* Если одновременно рассматривается несколько нормированных пространств, знак нормы при необходимости дополняют символом пространства: $\| \mathbf{x} \|_E$ — норма вектора $\mathbf{x}$ в пространстве E.

Окрестности в C и C^1. Окрестность в пространстве $C(\Delta)$ допускает простую *геометрическую интерпретацию.* ε-окрестность функции f в пространстве $C(\Delta)$ состоит в точности из тех функций g, $g \in C(\Delta)$, графики которых заключены между графиками функций $f+\varepsilon$ и $f-\varepsilon$, т. е. лежат внутри криволинейной полосы, образованной этими графиками (рис. 1).

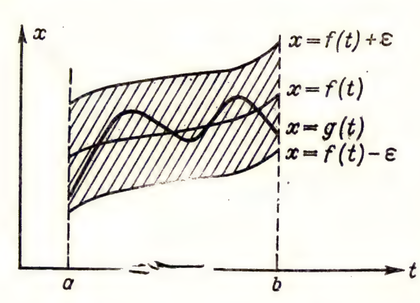


Рис. 1.

Функции из пространства $C^1(\Delta)$ принадлежат также и пространству $C(\Delta): C^1(\Delta) \subset C(\Delta)$. Как следствие, для функции f из $C^1(\Delta)$ можно рассматривать норму также и в $C(\Delta)$, при этом

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_C + \|f'\|_C,$$

откуда

$$\|f\|_C \leqslant \|f\|_{C^1}.$$

Тем самым ε-окрестность функции f, $f \in C^1(\Delta)$, в пространстве $C^1(\Delta)$ содержится в ε-окрестности этой же функции в пространстве $C(\Delta): \|g-f\|_C < \varepsilon$, если $\|g-f\|_{C^1} < \varepsilon$.

ε-окрестность функции f в пространстве $C^1(\Delta)$ также содержит лишь функции g, $g \in C^1(\Delta)$, графики которых заключены между графиками функций $f+\varepsilon$ и $f-\varepsilon$, однако она содержит не все такие функции. Достаточно близко к графикам функций $f \pm \varepsilon$ могут подходить графики лишь тех функций g, производные которых в соответствующих точках близки к производной функции f. Чем больше $\|f'-g'\|_C$, точнее, чем ближе это число к ε, тем теснее график функции g прижимается к графику функции f. Представление о геометрической интерпретации окрестности в пространстве $C^1(\Delta)$ можно получить из рис. 2. На этом рисунке изображена трубчатая окрестность графика вектор-функции $(f(t), f'(t))$ в пространстве $\mathbf{R}^3$. В ε-окрестность функции f в пространстве $C^1(\Delta)$ попадают функции g, для которых графики вектор-функций $(g(t), g'(t))$ содержатся в указанной трубчатой окрестности.

5. Вариация интегрального функционала. Множество непрерывно дифференцируемых функций — естественная область определения интегрального функционала. Норму на этом множестве можно задавать по-разному. При выборе нормы, описанном в п. 3, интегральный функционал I *непрерывен* на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Пусть I — отображение метрического пространства E в $\mathbf{R}$, иначе говоря, пусть I — функционал на пространстве E. *Функционал I называют непрерывным в точке* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in E$, *если для любой окрестности V точки $I(\mathbf{a})$ существует такая окрестность U точки* $\mathbf{a}$, *что $I(\mathbf{x}) \in V$ при всех* $\mathbf{x} \in U$. Функционал называется *непрерывным* (*на пространстве E*), если он непрерывен во всех

точках пространства. Для функций $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ предложенное определение совпадает с обычным.

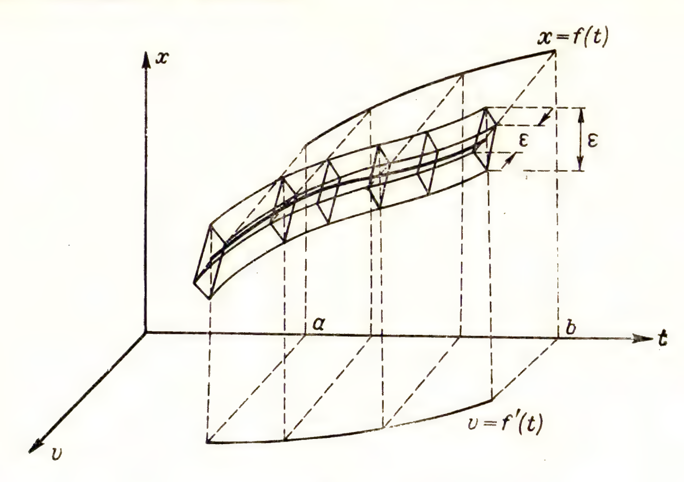


Рис. 2

Рассмотрим интегральный функционал

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,dt$$

на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Теорема 1. *Функционал I непрерывен на пространстве* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Функция L *равномерно непрерывна* на всяком ограниченном замкнутом множестве, например, на множестве

$$D_N = \{(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) : t \in \Delta,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n,\ \|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{v}\| \leqslant N\},$$

$N > 0$ — фиксированное число. Положим

$$\omega_N(r) = \sup_{\substack{(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) \in D_N,\ (t,\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) \in D_N \\ \|\Delta\mathbf{x}\| + \|\Delta\mathbf{v}\| \leqslant r}} |L(t,\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) - L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})|.$$

Равномерная непрерывность L на D_N означает, что $\omega_N(r) \to 0$ при $r \to 0$. Ясно также, что функция $\omega_N(r)$ зависит от r монотонно.

Если $\mathbf{f},\ \mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $\|\mathbf{f}\|_{C^1} \leqslant N$, $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\|_{C^1} \leqslant N$, то

$$|L(t,\ \mathbf{f}(t)+\mathbf{h}(t),\ \mathbf{f}'(t)+\mathbf{h}'(t)) - L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))| \leqslant \omega_N(\|\mathbf{h}\|_{C^1}).$$

Образуем разность

$$I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - I(\mathbf{f}) = \int_\Delta [L(t, \mathbf{f}(t)+\mathbf{h}(t), \mathbf{f}'(t)+\mathbf{h}'(t)) - L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))]\,dt.$$

Справедлива оценка

$$|I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - I(\mathbf{f})| \leqslant \omega_N(\|\mathbf{h}\|_{C^1})\,|\Delta|,$$

Для $\varepsilon > 0$ из $\omega_N(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$ выберем r: $\omega_N(r)\cdot|\Delta| < \varepsilon$

$du(a;h) = \nabla u(a)\cdot h = \frac{\partial u(a)}{\partial x_1}\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial u(a)}{\partial x_k}\cdot h_k$;
$u(a+h) = u(a) + \nabla u(a)\cdot h + o(h^2)$.

из которой следует непрерывность функционала I. В самом деле, задавшись функцией $\mathbf{f}$, выберем N так, что $2\|\mathbf{f}\| < N$, и условимся рассматривать такие $\mathbf{h}$, что $\|\mathbf{h}\| \leqslant N/2$. Тогда $\|\mathbf{f}\| \leqslant N$, $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\| \leqslant \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{h}\| < N$, и выполняется предыдущая оценка, которая означает, что число $|I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - I(\mathbf{f})|$ сколь угодно мало, если достаточно мала норма $\|\mathbf{h}\|$.

Перенесем теперь на интегральные функционалы некоторые понятия *дифференциального исчисления*. Пусть I — функционал общего вида на нормированном пространстве E. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{h}$ — фиксированные векторы из E; введем функцию $\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, полагая

$$\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h}).$$

Если функция φ *дифференцируема в точке* 0, *говорят, что функционал* I *дифференцируем в точке* $\mathbf{a}$ *вдоль вектора* $\mathbf{h}$, *а производную* $\varphi'(0)$ *называют* (*первой*) *вариацией функционала* I *в точке* $\mathbf{a}$ *вдоль вектора* $\mathbf{h}$ *и обозначают* $\delta I(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$:

$$\delta I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = \frac{d}{d\alpha} I(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h})\big|_{\alpha=0}.$$

Если функционал I дифференцируем в точке $\mathbf{a}$ вдоль *любого* вектора $\mathbf{h}$, говорят, что функционал I *имеет вариацию* в точке $\mathbf{a}$.

Стоит отметить, что понятие вариации не зависит от нормы на пространстве E; оно зависит лишь от структуры векторного пространства E.

Пусть $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ — функция, *дифференцируемая* в некоторой точке $\mathbf{a}$, тогда u имеет вариацию в точке $\mathbf{a}$, причем

$$\delta u(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = du(\mathbf{a};\ \mathbf{h}).$$

Дифференциал $du(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ является линейной функцией $\mathbf{h}$:

$$du(\mathbf{a};\ \alpha_1\mathbf{h}_1 + \alpha_2\mathbf{h}_2) = \alpha_1\, du(\mathbf{a};\ \mathbf{h}_1) + \alpha_2\, du(\mathbf{a};\ \mathbf{h}_2).$$

Если функционал I имеет вариацию в точке $\mathbf{a}$, она (вариация $\delta I(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$) не обязательно зависит от $\mathbf{h}$ линейно. В общем случае сохраняется лишь свойство *однородности*

$$\delta I(\mathbf{a};\ \alpha\mathbf{h}) = \alpha\,\delta I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}).$$

Условимся о некоторых обозначениях. Множество интегральных функционалов I на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, таких, что L — r раз непрерывно дифференцируемая функция на $\Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, будет обозначаться $\Omega^r(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. При $r \geqslant 2$ в множестве $\Omega^r(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ будет иногда выделяться подмножество $\Omega^r_{\mathrm{reg}}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$: функция L для функционалов этого подмножества будет предполагаться удовлетворяющей дополнительному условию: *матрица*

$$\{L_{v_i v_j}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})\}_{i,\ j=1,\ \dots,\ n}$$

не вырождена при всех $(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$, т. е. при всех $(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$ отличен от нуля ее определитель. Иногда вместо $I \in \Omega^r(\Delta \to \mathbf{R}^n)$

или $I \in \Omega^r_{\text{reg}}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ будем писать короче: $I \in \Omega^r$ или $I \in \Omega^r_{\text{reg}}$.

Теорема 2. *Интегральный функционал I, принадлежащий $\Omega^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, имеет вариацию в любой точке, при этом*

$$\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = \int_\Delta [(\nabla_{\mathbf{x}} L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\ \mathbf{h}(t)) + \\ + (\nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\ \mathbf{h}'(t))]\, dt. \qquad (6)$$

Прокомментируем выражение для вариации. В формуле (6) приняты естественные обозначения:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) = (L_{x_1}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}),\ \ldots,\ L_{x_n}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})) \in \mathbf{R}^n,$$
$$\nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) = (L_{v_1}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}),\ \ldots,\ L_{v_n}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})) \in \mathbf{R}^n.$$

Круглые скобки в (6), как и выше, — знак скалярного произведения в $\mathbf{R}^n$. В координатной записи формула (6) имеет вид

$$\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = \int_\Delta \sum_{i=1}^{n} [L_{x_i}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\, h_i(t) + L_{v_i}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\, h_i'(t)]\, dt.$$

Сравнивая формулы (2) и (6), можно утверждать, что функционал $\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$ от аргумента $\mathbf{h}$, рассматриваемый при фиксированной функции $\mathbf{f}$, является линейным интегральным функционалом. Условимся обозначать этот линейный интегральный функционал $I'(\mathbf{f})$:

$$\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = I'(\mathbf{f})\ \mathbf{h},$$

$I'(\mathbf{f})\,\mathbf{h}$ — значение функционала $I'(\mathbf{f})$ на элементе $\mathbf{h}$. Будем называть функционал $I'(\mathbf{f})$, $\mathbf{f}$ фиксировано, *производной функционала I в точке* $\mathbf{f}$.

Доказательство теоремы. Введем функцию

$$\varphi(\alpha) = I(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{h}) = \int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}(t) + \alpha\mathbf{h}(t),\ \mathbf{f}'(t) + \alpha\mathbf{h}'(t))\, dt.$$

Подынтегральное выражение при фиксированных $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ — непрерывная функция от t и α на полосе $\{(t,\ \alpha) : t \in \Delta,\ \alpha \in \mathbf{R}\}$, имеющая на этой полосе непрерывную частную производную по α. Поэтому функция φ непрерывно дифференцируема и

$$\varphi'(\alpha) = \int_\Delta \frac{\partial}{\partial\alpha} L(t,\ \mathbf{f}(t) + \alpha\mathbf{h}(t),\ \mathbf{f}'(t) + \alpha\mathbf{h}'(t))\, dt =$$
$$= \int_\Delta [(\nabla_{\mathbf{x}} L(t,\ \mathbf{f}(t) + \alpha\mathbf{h}(t),\ \mathbf{f}'(t) + \alpha\mathbf{h}'(t)),\ \mathbf{h}(t)) + (\nabla_{\mathbf{v}} L(\ldots),\ \mathbf{h}'(t))]\, dt.$$

Полагая $\alpha = 0$, получаем утверждение теоремы. □

Если $I \in \Omega^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то формула (6) для вариации интегрального функционала допускает важное преобразование. Это преобразование возможно не для всех, а лишь для *дважды непрерывно дифференцируемых функций* $\mathbf{f}$.

Обобщая определение, введенное в п. 1, будем говорить, что вектор-функция $\mathbf{f}:\Delta\to\mathbf{R}^n$ r раз, $r=1, 2, \ldots$, непрерывно дифференцируема, если r раз непрерывно дифференцируема каждая компонента f_i, $i=1, \ldots, n$, этой функции ($\mathbf{f}(t)=(f_1(t), \ldots, f_n(t))$; множество таких функций обозначают $C^r(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Отображение $\mathbf{f}^{(r)}:\Delta\to\mathbf{R}^n$, определяемое формулой

$$\mathbf{f}^{(r)}(t)=(f_1^{(r)}(t), \ldots, f_n^{(r)}(t)),$$

называется производной r-го порядка функции $\mathbf{f}$. Используются стандартные сокращения: $\mathbf{f}^{(1)}=\mathbf{f}'$, $\mathbf{f}^{(2)}=\mathbf{f}''$ и т. д. Иногда, ради краткости, если суть дела ясна из текста, запись $\mathbf{f}\in C^r(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ будет сокращаться до $\mathbf{f}\in C^r$.

Если $I\in\Omega^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, а $\mathbf{f}\in C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, то вектор-функция

$$t\to\nabla_{\mathbf{v}}L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$$

принадлежит множеству $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Воспользуемся очевидным соотношением

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t))=(\mathbf{g}'(t), \mathbf{h}(t))+(\mathbf{g}(t), \mathbf{h}'(t)),$$

в котором $\mathbf{g}, \mathbf{h}\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, и выполним во втором члене формулы (6) интегрирование по частям. Результат, очевидно, имеет вид

$$\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})=\int_\Delta(L[\mathbf{f}](t), \mathbf{h}(t))\,dt+(p[\mathbf{f}](t), \mathbf{h}(t))\big|_\Delta, \tag{7}$$

где $L[\mathbf{f}]$ и $p[\mathbf{f}]$ — функции $\Delta\to\mathbf{R}^n$, определяемые формулами

$$L[\mathbf{f}](t)=\nabla_{\mathbf{x}}L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))-\frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)),$$

$$p[\mathbf{f}](t)=\nabla_{\mathbf{v}}L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)).$$

Теорема 3. *Если $I\in\Omega^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, то вариация функционала I на функции* $\mathbf{f}$, *принадлежащей множеству* $C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *может быть представлена формулой* (7).

Будем называть формулу (7) *проинтегрированной формой* вариации функционала I.

6. Необходимые условия экстремума. Пусть I — функционал на *метрическом* пространстве E, т. е. отображение $E\to\mathbf{R}$. *Точка* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\in E$, *называется точкой локального минимума* (*максимума*), *если существует окрестность U точки* $\mathbf{a}$ *такая, что*

$$I(\mathbf{x})\geqslant I(\mathbf{a})\quad(\leqslant I(\mathbf{a})),\ \mathbf{x}\in U.$$

Собирательный термин для точек локального минимума и точек локального максимума — *точки локального экстремума.* Если в качестве окрестности U в определении точки локального экстремума может быть выбрано все пространство E (U — ∞-окрестность точки $\mathbf{a}$), говорят, что $\mathbf{a}$ — *точка абсолютного экстремума* (*абсолютного минимума*, *абсолютного максимума*). В дальнейшем словосочетание «локальный экстремум» будет сокращаться до «экстре-

мум». Если окрестность U, фигурирующая в определении точки экстремума, может быть выбрана так, что в определяющем неравенстве $I(\mathbf{x}) \geqslant I(\mathbf{a})$ $(\leqslant I(\mathbf{a}))$, $\mathbf{x} \in U$, равенство возможно лишь при $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, точку $\mathbf{a}$ называют *точкой строгого экстремума* (*строгого минимума, строгого максимума*).

Пусть I — функционал на нормированном пространстве E, пусть I имеет вариацию в точке $\mathbf{a}$. *Если* $\delta I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = 0$ *при всех* $\mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in E$, *то говорят, что* $\mathbf{a}$ — *стационарная точка функционала* I.

Теорема. *Пусть I — функционал на нормированном пространстве E и* $\mathbf{a}$ — *точка экстремума функционала I. Если функционал I имеет вариацию в точке* $\mathbf{a}$, *то* $\mathbf{a}$ — *стационарная точка функционала I.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h})$, $\mathbf{h}$ — произвольный, не равный нулю фиксированный вектор из E. Точка 0 — точка экстремума функции φ, так как при $|\alpha| < \varepsilon \|h\|^{-1}$ аргумент $\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h}$ функционала содержится в ε-окрестности точки $\mathbf{a}$, и, следовательно (если $\mathbf{a}$, например, — точка минимума), $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h}) \geqslant I(\mathbf{a}) = \varphi(0)$ при достаточно малых α. Так как φ дифференцируема в точке 0, то $\varphi'(0) = 0$, т. е. согласно определению вариации $\delta I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = 0$. Теорема доказана. □

Рассмотрим две простейшие экстремальные задачи для интегрального функционала I, считая, что $I \in \Omega^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Задача со свободными граничными точками. Задача со свободными граничными точками — это задача об отыскании точек экстремума функционала I, рассматриваемого на всем пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Необходимое условие экстремума в задаче со свободными граничными точками (предварительный вид). *Точка экстремума* $\mathbf{f}$ *функционала I на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ является стационарной точкой, т. е. такой точкой* $\mathbf{f}$, *что* $I'(\mathbf{f}) = 0$.

Задача с заданными граничными точками. Интегральный функционал I, заданный на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ формулой (1), ограничивается на множество $\Omega \subset C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, состоящее из функций $\mathbf{f}$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{f}(a) = \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{f}(b) = \boldsymbol{\eta},$$

где $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ — заданные векторы из $\mathbf{R}^n$. Подобное множество в согласии с п. 2 обозначим $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Множество $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ как подмножество нормированного пространства $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ является метрическим пространством. Задача состоит в отыскании точек экстремума функционала I, ограниченного на $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Так как множество $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ при $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ или $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ не является векторным подпространством пространства $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, оно не является нормированным пространством. Поэтому мы не можем непосредственно сослаться на установленную выше теорему.

Пусть $\mathbf{f}$ — фиксированная функция из $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Произвольную функцию $\mathbf{g}$ из $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ можно представить формулой

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{h},$$

где $\mathbf{h} \in C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n) = C^1_{00}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Так как множество $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ — векторное подпространство, то $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ — нормированное пространство. Формула $\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{h}$, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, позволяет рассматривать всякий функционал на $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ как функционал на нормированном пространстве $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Пусть $\mathbf{f}$ — точка экстремума интегрального функционала I на множестве $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Это равносильно тому, что 0 — точка одноименного экстремума функционала $\mathbf{h} \to I_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}) = I(\mathbf{f} + \mathbf{h})$, $\mathbf{f}$ фиксировано, на пространстве $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Следует заметить, что $\|\mathbf{g} - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{h}\|$, где $\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{h}$. Функционал $I_{\mathbf{f}}$ имеет вариацию в точке 0, причем $\delta I_{\mathbf{f}}(0;\ \mathbf{h}) = \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$. В самом деле, согласно теореме 1 п. 5 при всяком $\mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, существует производная

$$\frac{d}{d\alpha} I_{\mathbf{f}}(\alpha\mathbf{h}) = \frac{d}{d\alpha} I(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{h})\big|_{\alpha=0} = \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}).$$

Таким образом, получаем

Необходимое условие экстремума в задаче с заданными граничными точками (предварительный вид). *Точка экстремума* $\mathbf{f}$ *функционала* I *на множестве* $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ *удовлетворяет условию*

$$\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = 0,$$

где $\mathbf{h}$ — *произвольная функция из пространства* $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

7. Линейные интегральные функционалы. В этом пункте мы рассмотрим линейный интегральный функционал

$$L(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(\mathbf{g}_0(t),\ \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{h}'(t))]\, dt$$

на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и выясним, при каких $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1 \in C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ он равен нулю на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ или $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, т. е. при каких $\mathbf{g}_0$, $\mathbf{g}_1$ $L(\mathbf{h}) = 0$ для любой вектор-функции $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ или $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Лемма 1 (лемма Дюбуа — Реймона). *Функционал*

$$h \to \int_\Delta g(t)\, h'(t)\, dt$$

на $C^1_0(\Delta)$, *где* $g \in C(\Delta)$, *равен нулю тогда и только тогда, когда функция* g *постоянна.*

Достаточность очевидна:

$$\int_\Delta g(t)\, h'(t)\, dt = g \int_\Delta h'(t)\, dt = gh(t)\big|_\Delta = 0.$$

т.к $h \in C^1_0(\Delta)$ т.е
$h(a) = h(b)$.

Обратимся к доказательству необходимости. Положим

$$h(t)=\int_a^t [g(\tau)-\alpha]\,d\tau,$$

α — число. Функция h принадлежит множеству $C^1(\Delta)$, кроме того, $h(a)=0$ и, если $\alpha=|\Delta|^{-1}\int_\Delta g(\tau)\,d\tau$, то $h(b)=0$. Таким образом, при указанном α $h\in C_0^1(\Delta)$. Следовательно,

$$\int_\Delta g(t)\,[g(t)-\alpha]\,dt=0.$$

Так как

$$\int_\Delta \alpha\,[g(t)-\alpha]\,dt=0,$$

то

$$\int_\Delta [g(t)-\alpha]^2\,dt=\int_\Delta g(t)\,[g(t)-\alpha]\,dt-\alpha\int_\Delta [g(t)-\alpha]\,dt=0,$$

откуда $g(t)=\alpha$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Функционал L на множестве $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ равен нулю тогда и только тогда, когда:* 1) $\mathbf{g}_1\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, 2) $\mathbf{g}_1'=\mathbf{g}_0$.

Проверим достаточность. Если верно 1), то можно выполнить интегрирование по частям:

$$L(\mathbf{h})=\int_\Delta (\mathbf{g}_0(t)-\mathbf{g}_1'(t),\ \mathbf{h}(t))\,dt+(\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{h}(t))\,|_\Delta.$$

Интеграл равен нулю в силу 2); подстановка равна нулю, так как $\mathbf{h}(a)=\mathbf{h}(b)=0$.

Чтобы установить необходимость, проведем интегрирование по частям иначе:

$$L(\mathbf{h})=\int_\Delta \left(-\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau+\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{h}'(t)\right)dt+$$
$$+\left(\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau,\ \mathbf{h}(t)\right)\Big|_\Delta=\int_\Delta \left(-\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau+\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{h}'(t)\right)dt.$$

Интеграл $\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau$ следует понимать *покоординатно*:

$$\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau=\left(\int_a^t g_{01}(\tau)\,d\tau,\ \ldots,\ \int_a^t g_{0n}(\tau)\,d\tau\right).$$

Положим $\mathbf{h}(t)=\zeta(t)\,\boldsymbol{\xi}$, где $\zeta\in C_0^1(\Delta)$ и $\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$. Тогда

$$L(\mathbf{h})=\int_\Delta \left(-\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau+\mathbf{g}_1(t),\ \boldsymbol{\xi}\right)\zeta(t)\,dt.$$

Если $L(\mathbf{h})=0$, то в силу леммы 1

$$\left(-\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau+\mathbf{g}_1(t),\ \boldsymbol{\xi}\right)=A,$$

A — постоянная. Ввиду произвольности $\boldsymbol{\xi}$

$$-\int_a^t \mathbf{g}_0(\tau)\,d\tau+\mathbf{g}_1(t)=\boldsymbol{\eta},$$

$\boldsymbol{\eta}$ — постоянный вектор. Так как интеграл от $\mathbf{g}_0$ принадлежит $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, то и $\mathbf{g}_1\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. В таком случае последнее соотношение можно продифференцировать, откуда $\mathbf{g}_1'=\mathbf{g}_0$. Лемма доказана. □

$g_1|_{a,b}=0$ т. е. $g_1(a)=g_1(b)=0$
$(g_1(a), h(a)) = (g_1(b), h(b))$. 1) берём $h(b)\equiv 0$, $h(a)=g_1(a) \Rightarrow g_1(a)\equiv 0$
2) аналогично $g_1(b)=0$

Лемма 3. *Функционал L на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ равен нулю тогда и только тогда, когда:* 1) $\mathbf{g}_1 \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, 2) $\mathbf{g}_1' = \mathbf{g}_0$, 3) $\mathbf{g}_1|_{a,b} = 0$.

План доказательства достаточности таков же, как и в лемме 2, но подстановка $(\mathbf{g}_1(t), \mathbf{h}(t))|_\Delta$ теперь равна нулю в силу условия 3). Необходимость: так как $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n) \subset C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то для аннулирования L на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ должны выполняться условия 1) и 2). Это позволяет провести интегрирование по частям:

$$L(\mathbf{h}) = \int_\Delta (\mathbf{g}_0(t) - \mathbf{g}_1'(t), \mathbf{h}(t))\,dt + (\mathbf{g}_1(t), \mathbf{h}(t))|_\Delta = (\mathbf{g}_1(t), \mathbf{h}(t))|_\Delta;$$

так как $L(\mathbf{h}) = 0$, а векторы $\mathbf{h}(a)$ и $\mathbf{h}(b)$ произвольны и независимы, то $\mathbf{g}_1(t)|_{a,b} = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 4 (лемма Лагранжа). *Функционал*

$$h \to \int_\Delta g(t)\,h(t)\,dt$$

на множестве $C_0^1(\Delta)$, где $g \in C(\Delta)$, равен нулю тогда и только тогда, когда $g = 0$.

Лемма 4 — очевидное следствие леммы 2.

Лемма 5 (обобщенная лемма Дюбуа — Реймона). *Пусть $g \in C(\Delta)$. Функционал*

$$h \to \int_\Delta g(t)\,h^{(r)}(t)\,dt$$

на множестве функций класса $C^r(\Delta)$, удовлетворяющих условиям $h^{(q)}(t)|_{a,b} = 0$, $q = 0, \ldots, r-1$, равен нулю тогда и только тогда, когда g — полином, степень которого не превосходит $r-1$.

Достаточность устанавливается интегрированием по частям. Необходимость можно установить, естественно обобщая доказательство леммы 1. Ограничимся случаем $r=2$; случай $r>2$ в дальнейшем не встретится. Положим

$$h(t) = \int_a^t d\tau \int_a^\tau [g(\sigma) - \alpha - \beta(\sigma - a)]\,d\sigma,$$

где α и β — некоторые числа. Функция h принадлежит $C^2(\Delta)$ и удовлетворяет условиям $h(a) = 0$, $h'(a) = 0$. Числа α и β находятся из требований

$$h(b) = \int_\Delta d\tau \int_a^\tau g(\sigma)\,d\sigma - \alpha \frac{|\Delta|^2}{2!} - \beta \frac{|\Delta|^3}{3!} = 0,$$

$$h'(b) = \int_\Delta g(\tau)\,d\tau - \alpha \frac{|\Delta|}{1!} - \beta \frac{|\Delta|^2}{2!} = 0.$$

Определитель системы уравнений для чисел α и β

$$\begin{vmatrix} \dfrac{|\Delta|^2}{2!} & \dfrac{|\Delta|^3}{3!} \\ \dfrac{|\Delta|}{1!} & \dfrac{|\Delta|^2}{2!} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}|\Delta|^4$$

отличен от нуля, поэтому условиям $h(b)=0$, $h'(b)=0$ можно удовлетворить выбором α и β. Вычислим функционал на построенной функции h:

$$\int_\Delta g(t)\,h''(t)\,dt=\int_\Delta g(t)\,[g(t)-\alpha-\beta(t-a)]\,dt=0.$$

Так как

$$\int_\Delta [\alpha+\beta(t-a)]\,h''(t)\,dt=\int_\Delta [\alpha+\beta(t-a)][g(t)-\alpha-\beta(t-a)]\,dt=0,$$

то

$$\int_\Delta [g(t)-\alpha-\beta(t-a)]^2\,dt=0,$$

откуда $g(t)=\alpha+\beta(t-a)$. Лемма доказана. □

8. Уравнение Эйлера. Граничные условия. *Стационарные точки* $\mathbf{f}$ интегрального функционала I определяются уравнением $I'(\mathbf{f})=0$:

$$I'(\mathbf{f})\,\mathbf{h}=\int_\Delta [(\nabla_{\mathbf{x}}L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\ \mathbf{h}(t))+(\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\ \mathbf{h}'(t))]\,dt.$$

Для того чтобы функция $\mathbf{f}$ *была стационарной точкой функционала* I, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1) $p[\mathbf{f}]\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$,
2) $L[\mathbf{f}]=0$,
3) $p[\mathbf{f}](t)\,|_{a,b}=0$.

Использованные здесь обозначения введены в п. 5, напомним их:

$$p[\mathbf{f}](t)=\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\quad L[\mathbf{f}](t)=$$
$$=\nabla_{\mathbf{x}}L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))-\frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)).$$

Сформулированное утверждение — следствие леммы 3 п. 7; $p[\mathbf{f}]$ совпадает в обозначениях леммы с $\mathbf{g}_1$, $L[\mathbf{f}]$ — с $\mathbf{g}_0-\mathbf{g}_1'$.

В дальнейшем в этом параграфе будет предполагаться, что $I\in\Omega^2_{\mathrm{reg}}(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *была стационарной точкой функционала* I, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*:

1) $\mathbf{f}\in C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$,
2) $L[\mathbf{f}]=0$,
3) $p[\mathbf{f}](t)\,|_{a,b}=0$.

Чтобы доказать теорему, достаточно установить утверждение:

$$\mathbf{f}\in C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)\ \textit{равносильно}\ p[\mathbf{f}]\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n).$$

Если $f\in C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, то $p[\mathbf{f}]\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, что уже отмечалось в п. 5.

Лемма. *Если* $p[\mathbf{f}]\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *то* $\mathbf{f}\in C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Для доказательства рассмотрим отображение:

$$(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})\to(t,\ \mathbf{x},\ \hat p(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})),\quad \text{где}\quad \hat p(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})=\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}).$$

Это отображение непрерывно дифференцируемо (т. е. непрерывно дифференцируемы все его координаты), а матрица Якоби отображения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \{\delta_{kl}\} & 0 \\ \{L_{tv_i}\} & \{L_{v_i x_l}\} & \{L_{v_i v_j}\} \end{pmatrix}.$$

Якобиан отображения, определитель матрицы Якоби, равен

$$\det \{L_{v_i v_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\}_{i,\ j=1, \ldots, n}$$

и по предположению отличен от нуля. В силу теоремы об обратной функции (для отображений $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$) * рассматриваемое отображение локально обратимо: каждая точка $(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ обладает окрестностью, на которой отображение обратимо, причем обратное отображение (обозначим его $j_{t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0}$) также непрерывно дифференцируемо.

Положим

$$\mathbf{g}(t) = \hat{p}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = p[\mathbf{f}](t).$$

Согласно условию леммы $\mathbf{g} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Каждая точка $(t_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{f}'(t_0))$ обладает окрестностью, на которой

$$(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = j_{t_0, \mathbf{f}(t_0), \mathbf{f}'(t_0)}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)).$$

Так как $j_{\ldots}$, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — непрерывно дифференцируемы, то $\mathbf{f}'$ — непрерывно дифференцируема (в окрестности любой точки, а следовательно, и всюду на Δ), иначе говоря, $\mathbf{f} \in C^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Лемма доказана.

Условие $L[\mathbf{f}] = 0$ при $\mathbf{f} \in C^2$ можно переписать следующим образом:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \nabla_{\mathbf{v}} L_t(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \\ - \sum_{j=1}^n [\nabla_{\mathbf{v}} L_{x_j}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') f_j'(t) + \nabla_{\mathbf{v}} L_{v_j}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') f_j''(t)] = 0,$$

или в координатах

$$L_{x_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - L_{v_i t}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \\ - \sum_{j=1}^n [L_{v_i x_j}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') f_j'(t) + L_{v_i v_j}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') f_j''(t)] = 0.$$

В этих формулах $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$, $\mathbf{f}' = \mathbf{f}'(t)$.

Введем в $\mathbf{R}^n$ *линейные операторы* $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, действующие по формулам

$$\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}} \mathbf{h} = \left(\sum_{j=1}^n L_{v_1 v_j} h_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^n L_{v_n v_j} h_j\right),$$

$$\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}} \mathbf{h} = \left(\sum_{j=1}^n L_{v_1 x_j} h_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^n L_{v_n x_j} h_j\right).$$

---

* Формулировку теоремы об обратной функции см. в конце п. 37.

Иначе говоря, операторы $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}$ и $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}}$ имеют *матрицы* $\{L_{v_i v_j}\}$ и $\{L_{v_i x_j}\}$. В последних соотношениях $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}$, $L_{v_i v_j}$ и т. п. — сокращенные обозначения для $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $L_{v_i v_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Используя введенные обозначения, выражению $L[\mathbf{f}]$ можно придать вид

$$L[\mathbf{f}](t) = \nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \nabla_{\mathbf{v}} L_t(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{f}' - \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{f}''.$$

Видно, что соотношение $L[\mathbf{f}] = 0$ представляет собою *дифференциальное уравнение второго порядка* для вектор-функции $\mathbf{f}$ или *систему n дифференциальных уравнений второго порядка* для ее компонент f_i, $i = 1, \ldots, n$. Это уравнение называют *уравнением Эйлера,* соответственно *системой уравнений Эйлера, для функционала I*. Всякое решение $\mathbf{f} \in C^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ уравнения Эйлера называют *экстремалью функционала I*. Условие невырожденности матрицы $\{L_{v_i v_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\}$, фигурирующее в определении класса Ω^r_{reg} и использованное при доказательстве леммы, означает, что уравнение Эйлера может быть разрешено относительно $\mathbf{f}''$.

Условия $p[\mathbf{f}](t)|_{a,b} = 0$, подробнее

$$\nabla_{\mathbf{v}} L(a, \mathbf{f}(a), \mathbf{f}'(a)) = 0, \qquad \nabla_{\mathbf{v}} L(b, \mathbf{f}(b), \mathbf{f}'(b)) = 0,$$

можно рассматривать как систему *граничных условий* для уравнения Эйлера, их называют *естественными граничными условиями* для функционала I.

Теорема 1 (новая формулировка). *Для того чтобы функция* $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, *была стационарной точкой интегрального функционала, необходимо и достаточно, чтобы:* 1) $\mathbf{f} \in C^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, 2) $\mathbf{f}$ *удовлетворяла уравнению Эйлера,* 3) $\mathbf{f}$ *удовлетворяла естественным граничным условиям.*

Уравнение Эйлера и естественные граничные условия определяют на интервале Δ *краевую задачу*. И уравнение Эйлера и естественные граничные условия могут быть *нелинейными*. По набору параметров полученная краевая задача является благополучной: общее решение уравнения Эйлера содержит в типичном случае $2n$ числовых параметров, а естественные граничные условия содержат $2n$ скалярных соотношений, которые могут быть использованы для определения этих параметров. Из теории дифференциальных уравнений известно, однако, что краевая задача не имеет столь простых качеств, как рассматриваемая локально задача с начальными условиями, — задача Коши. Множество решений краевой задачи в зависимости от ее конкретных качеств может быть пустым, может быть бесконечным, но может быть конечным и в том числе содержать ровно одно решение. И хотя уравнение Эйлера и естественные граничные условия — далеко не общая краевая задача, множество ее решений также может быть и пустым, и бесконечным, и конечным. Сказанное не означает, однако, что невозможно выделить содержательные случаи, когда краевая за-

дача разрешима и ее решение единственно. Теоремы такого типа существуют, причем доказательство их нередко опирается на связь краевых задач со стационарными точками интегральных функционалов. Разработаны схемы рассуждений (некоторое представление о них будет дано в гл. III), которые при определенных предположениях позволяют прямым образом установить существование точек экстремума интегрального функционала, а тем самым доказать разрешимость краевой задачи для уравнения Эйлера.

В качестве примера приведем без доказательства одну подобную теорему для скалярного случая $n=1$, считая, что уравнение разрешено относительно f'':

$$f''(t)=F(t,\ f(t),\ f'(t)).$$

Теорема 2. *Пусть функция* $F:\Delta\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *непрерывно дифференцируема и существуют такие ограниченные на всяком ограниченном множестве функции* $\alpha:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $\beta:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *и такое число* $k>0$, *что*

$$F_x(t,\ x,\ v)\geqslant k,\quad |F(t,\ x,\ v)|\leqslant\alpha(t,\ x)+\beta(t,\ x)\,v^2.$$

Тогда краевая задача

$$f''(t)=F(t,\ f(t),\ f'(t)),\quad t\in[a,\ b],\quad f(a)=\xi,\quad f(b)=\eta,$$

где ξ, η — *заданные числа, имеет, и притом единственное, решение.*

Обратимся еще раз к обсуждению необходимых условий экстремума для интегрального функционала I, $I\in\Omega^2_{\text{reg}}(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Необходимое условие экстремума в задаче со свободными граничными точками. *Точка экстремума* $\mathfrak{f}$ *функционала* I *на пространстве* $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ *принадлежит множеству* $C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *удовлетворяет уравнению Эйлера и естественным граничным условиям.* Это условие вытекает из предварительного вида необходимого условия п. 6 и доказанной выше теоремы 1.

Необходимое условие экстремума в задаче с заданными граничными точками. *Точка экстремума* $\mathfrak{f}$ *функционала* I *на множестве* $C^1_{\xi\eta}$ *принадлежит множеству* $C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *удовлетворяет уравнению Эйлера и граничным условиям*

$$\mathfrak{f}(a)=\xi,\qquad \mathfrak{f}(b)=\eta.$$

Необходимое условие п. 6 и лемма 2 п. 7 показывают, что функция $\mathfrak{f}$ в рассматриваемой задаче должна удовлетворять условиям:

1) $p[\mathfrak{f}]\in C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$,
2) $L[\mathfrak{f}]=0$,
3) $\mathfrak{f}(a)=\xi$, $\mathfrak{f}(b)=\eta$.

Из леммы настоящего пункта следует, что условие 1) равносильно $\mathfrak{f}\in C^2(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Таким образом, точка экстремума в задаче с заданными граничными точками, как и в задаче со свободными граничными точками, является решением краевой задачи для уравнения Эйлера, но с другими граничными условиями.

9. Интегралы уравнения Эйлера. Если функция $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, которая определяет интегральный функционал, не зависит от какого-либо из аргументов, например от t или от $\mathbf{x}$, или лишь от какой-либо компоненты векторного аргумента $\mathbf{x}$, то легко явно выписать некоторый *первый интеграл* уравнения Эйлера.

Введем отображение $\hat{p}: \Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, которое уже фигурировало в п. 8:

$$\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Если функция L не зависит от i-й координаты вектора $\mathbf{x}$, *то функция* $\hat{p}_i$, *определяемая соотношением*

$$\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\hat{p}_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \ldots, \hat{p}_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})),$$

является первым интегралом уравнения Эйлера. Это значит, что на всякой экстремали $\mathbf{f}$ функция $\hat{p}_i(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$ постоянна. Утверждение вытекает из уравнения Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{p}_i(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = -\frac{d}{dt}L_{v_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = L_{x_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \\ - \frac{d}{dt}L_{v_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 0.$$

Введем функцию $\hat{H}: \Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$:

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

В координатной записи

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{n} v_i L_{v_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Если функция L не зависит от t, то $\hat{H}$ — первый интеграл уравнения Эйлера:

$$\frac{d}{dt}\hat{H}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = -L_t(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - (\nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'), \mathbf{f}') - \\ - (\nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'), \mathbf{f}'') + (\mathbf{f}'', \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')) + \left(\mathbf{f}', \frac{d}{dt}\nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\right) = \\ = -L_t(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - (L[\mathbf{f}], \mathbf{f}') = 0.$$

§ 2. Примеры

10. Экстремали функционала $\int l(f)(1+f'^2)^{1/2}\,dt$. Множество M метрического пространства E называется *открытым*, если каждая точка множества M обладает окрестностью (в E), принадлежащей множеству M. Теорема, утверждающая, что точка экстремума функционала I на нормированном пространстве является стационарной точкой функционала (если, конечно, I имеет вариацию в этой точке), остается справедливой для функционалов, определенных на открытых множествах нормированных пространств. Необходимые условия экстремума для интегральных функционалов как в задаче со свободными гра-

ничными точками, так и в задаче с заданными граничными точками также сохраняются, если функционал определен не на всем пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, соответственно $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, а на некотором открытом множестве Ω этого пространства. В нижеследующих примерах интегральный функционал будет задан либо на всем пространстве, либо на открытом подмножестве.

Пусть $n=1$ и

$$L(t, x, v) = l(t, x)(1+v^2)^{1/2}, \quad l > 0.$$

Производная $L_{vv} = l(1+v^2)^{-3/2}$ всюду положительна, поэтому стационарные точки функционала

$$I(f) = \int_\Delta l(t, f(t))(1+f'^2(t))^{1/2}\,dt,$$

а также точки экстремума в обоих типах экстремальных задач, принадлежат множеству $C^2(\Delta)$ и тем самым являются решениями уравнения Эйлера. В п. 75 будет показано, что экстремали функционала I допускают разнообразные интерпретации.

Уравнение Эйлера имеет вид

$$l_x(t, f)(1+f'^2)^{1/2} - \frac{d}{dt}\frac{l(t, f)f'}{(1+f'^2)^{1/2}} = 0.$$

Естественные граничные условия равносильны соотношениям

$$f'(a) = 0, \qquad f'(b) = 0.$$

Геометрически они означают, что график функции f пересекает прямые $t=a$, $t=b$ ортогонально.

Будем считать далее, что L, т. е. l, не зависит от t, тогда уравнение Эйлера упрощается:

$$l(f)f'' = l_x(f)(1+f'^2).$$

Исследуя решения этого уравнения, не будем фиксировать интервал и, говоря об *экстремалях*, условимся рассматривать их на *максимальной области определения*. Функция $\hat{H}$ дается формулой

$$\hat{H}(t, x, v) = -l(t, x)(1+v^2)^{-1/2}.$$

Если l не зависит от t, то $\hat{H}$ — первый интеграл уравнения Эйлера

$$l(f)(1+f'^2)^{-1/2} = c, \qquad c > 0.$$

Простые вычисления дают

$$cf' = \pm(l^2(f) - c^2)^{1/2},$$

знак $\pm$ совпадает со знаком f'.

При $l=1$ функционал I обсуждался в п. 2, пример 2). Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $f''=0$, его общее решение $f(t) = \alpha t + \beta$, α, β произвольны. Стационарные точки функционала — постоянные функции, их бесконечно много. Решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее условиям $f(a)=\xi$, $f(b)=\eta$, единственно.

Ниже будет предполагаться, что *производная* $l' = l_x$ *нигде не равна нулю*. Из уравнения Эйлера видно, что в таком случае $f''(t) \neq 0$, откуда следует, в частности, что *функционал* I *не имеет стационарных точек*. Знак f'' совпадает со знаком l'. Для каждой экстремали f имеется не более одной точки τ, в которой $f'(\tau)=0$. Эта точка характеризуется соотношением $x_c = f(\tau)$, где $l(x_c) = c$. При $l' > 0$ τ — точка минимума экстремали: $f(t) > x_c$, если $t \neq \tau$; при $l' < 0$ τ — точка максимума: $f(t) < x_c$, если $t \neq \tau$. На любом интервале, где $f' \neq 0$, выполняется неравенство $l(f(t)) > c$ и *график экстремали имеет уравнение*

$$c\int \frac{dx}{\sqrt{l^2(x) - c^2}} = \pm t.$$

Пусть (t_1, x_1) — какая-либо точка, лежащая на графике экстремали, тогда уравнение графика может быть записано следующим образом:

$$c\int_{x_1}^{x}\frac{dy}{\sqrt{l^2(y)-c^2}}=\pm(t-t_1).$$

Если график экстремали содержит точку (τ, x_c), то, полагая $t_1\to\tau$ (при фиксированных t и x), получим

$$c\int_{x_c}^{x}\frac{dy}{\sqrt{l^2(y)-c^2}}=\pm(t-\tau).$$

Интеграл здесь понимается как (*сходящийся*) *несобственный* в точке x_c. Перепишем последнее уравнение несколько иначе:

$$c\int_{x_c}^{x}\frac{dy}{\sqrt{l^2(y)-c^2}}=\pm|t-\tau|,$$

в этом соотношении знак $\pm$ совпадает со знаком $x-x_c$, т. е. со знаком l'. Ясно, что *график экстремали симметричен относительно прямой* $t=\tau$.

11. Экстремали функционала $\int f^{\varkappa}(1+f'^2)^{1/2}\,dt$. Конкретизируем вид функции l:

$$l(x)=x^{\varkappa},\qquad \varkappa\neq 0.$$

Будем предполагать, что функция l определена при $x>0$; в качестве аргументов f функционала I будут рассматриваться лишь *функции с положительными значениями*. При таком выборе функции l уравнение Эйлера примет вид

$$f''=\varkappa f^{-1}(1+f'^2).$$

Убедимся, что график *произвольной экстремали содержит точку* (τ, x_c). Пусть $\varkappa<0$. В этом случае график произвольной экстремали расположен в полосе $0<x<x_c$. Если экстремаль f такова, что в некоторой точке t_0 $f'(t_0)>0$, то существует точка $\tau>t_0$, такая, что $f'(\tau)=0$. Если же в некоторой точке t_0 $f'(t_0)<0$, то существует точка $\tau<t_0$, такая, что $f'(\tau)=0$. Оба случая рассматриваются аналогично. Ограничимся первым. Итак, пусть $f'(t_0)>$ >0. *Максимальный интервал определения* (a, b) экстремали f конечен. В самом деле, из уравнения Эйлера следует

$$-f''(t)=\frac{-\varkappa}{f(t)}\left(1+f'^2(t)\right)\geqslant\frac{|\varkappa|}{x_c}.$$

Это неравенство означает, что график экстремали целиком лежит под параболой

$$x=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)-\frac{|\varkappa|}{2x_c}(t-t_0)^2,$$

которая расположена в полуплоскости $x>0$ только при t, принадлежащих конечному интервалу. Если экстремаль f не может быть продолжена правее точки b, $b>t_0$, то, как видно из уравнения Эйлера, либо $f(t)\to 0$ при $t\to b-$ -0, либо $f'(t)\to\infty$ при $t\to b-0$. Интеграл $cf'=\pm(l^2(f)-c^2)^{1/2}$ показывает, что $f'(t)\to\infty$ при $t\to b-0$ лишь если $l(f)\to\infty$, т. е. если $f(t)\to 0$ при $t\to b-0$. Таким образом, остается единственная возможность: $f(t)\to 0$ при $t\to b-0$. Отсюда следует, что функция f имеет на интервале (t_0, b) точку максимума τ, в которой $f'(\tau)=0$. Итак, при $\varkappa<0$ всякая экстремаль содержит точку (τ, x_c).

Читатель легко самостоятельно перенесет эти рассмотрения на случай $\varkappa>0$. При этом вновь окажется, что график всякой экстремали содержит точку $(\tau, \varkappa_c)$.

Мы установили, таким образом, что *уравнение графика произвольной экстремали рассматриваемого функционала имеет вид*

$$\int_{x_c}^{x} \frac{dy}{\sqrt{y^{2\varkappa}-c^2}} = \pm |t-\tau|,$$

где $\tau \in \mathbf{R}$, $c>0$ — произвольные параметры. Заметим, что $x_c = c^{1/\varkappa}$ и $\operatorname{sign} l' = \operatorname{sign} \varkappa$. Перейдем в интеграле к новой переменной интегрирования $y = c^{1/\varkappa} z$, тогда уравнение экстремали примет вид

$$\int_{1}^{xc^{-1/\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{z^{2\varkappa}-1}} = \pm |t-\tau| c^{-1/\varkappa}.$$

Введем функцию

$$\Phi(x) = \operatorname{sign} \varkappa \int_{1}^{x} \frac{dy}{\sqrt{y^{2\varkappa}-1}}.$$

Функция Φ определена на интервале $(0, 1]$, если $\varkappa < 0$, и на интервале $[1, \infty)$, если $\varkappa > 0$. Функция Φ — гладкая функция при $x \neq 1$, $\Phi(1) = 0$, $\Phi'(1) = \infty \operatorname{sing} \varkappa$. Кроме того, $\Phi \geqslant 0$, Φ *строго монотонна* ($\Phi' \neq 0$), Φ *строго вогнута* ($\Phi'' < 0$).

С помощью функции Φ уравнение графика экстремали запишется короче:

$$\Phi\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{|t-\tau|}{k},$$

где $k = c^{1/\varkappa}$. Вследствие монотонности функции Φ можно, вводя *обратную функцию* Φ^{-1}, записать экстремаль следующим образом:

$$f(t) = k\Phi^{-1}\left(\frac{|t-\tau|}{k}\right).$$

Экстремаль, соответствующую $\tau = 0$, $k = 1$, будем называть *стандартной*:

$$\Phi(x) = |t|$$

— уравнение графика стандартной экстремали,

$$f(t) = \Phi^{-1}(|t|),$$

— вид стандартной экстремали. График стандартной экстремали проходит через точку $(0, 1)$, 0 — точка экстремума стандартной экстремали, $t = 0$ — *ось симметрии* ее графика.

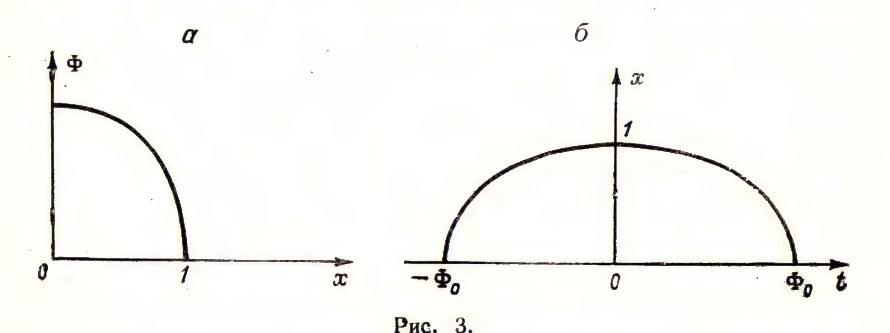


Рис. 3.

График произвольной экстремали может быть получен из графика стандартной экстремали *сдвигом оси симметрии* $t = 0 \to t = \tau$, $\tau \in \mathbf{R}$ произвольно, и последующим *преобразованием подобия* относительно точки $(\tau, 0)$ с коэффициентом k, $k \in (0, \infty)$ произвольно.

Рассмотрим подробнее стандартную экстремаль. Будем различать три случая: 1) $\varkappa < 0$, 2) $0 < \varkappa \leqslant 1$, 3) $1 < \varkappa$.

1) $\varkappa < 0$. График функции Φ изображен на рис. 3, *а*, график стандартной экстремали — на рис. 3, *б*. Стандартная экстремаль определена на интервале $(-\Phi_0, \Phi_0)$. Число $\Phi_0 = \Phi(0)$ дается интегралом

$$\Phi_0 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{2\varkappa} - 1}}.$$

2) $0 < \varkappa \leqslant 1$. График функции Φ изображен на рис. 4, *а*, график стандартной экстремали — на рис. 4, *б*. При $x \to \infty$ $\Phi(x) \to \infty$, более точно,

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{1-\varkappa} x^{1-\varkappa}, \quad \text{если} \quad \varkappa < 1,$$

$$\Phi(x) \sim \ln x, \quad \text{если} \quad \varkappa = 1.$$

Стандартная экстремаль определена на всей оси.

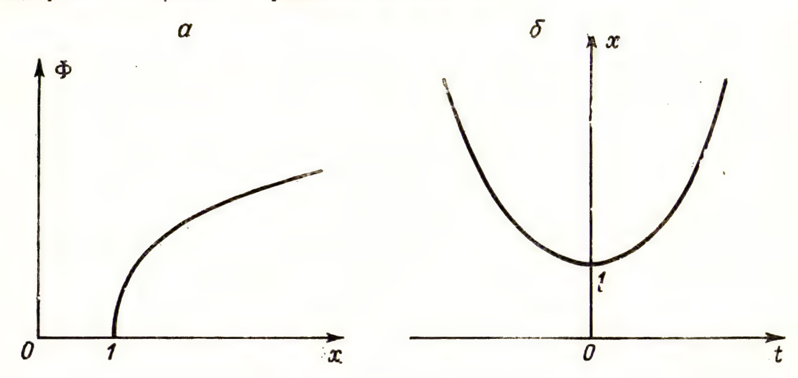


Рис. 4.

3) $1 < \varkappa$. График функции Φ изображен на рис. 5, *а*, график стандартной экстремали на рис. 5, *б*. При $x \to \infty$ $\Phi(x) \to \Phi_1$, стандартная экстремаль определена на интервале $(-\Phi_1, \Phi_1)$.

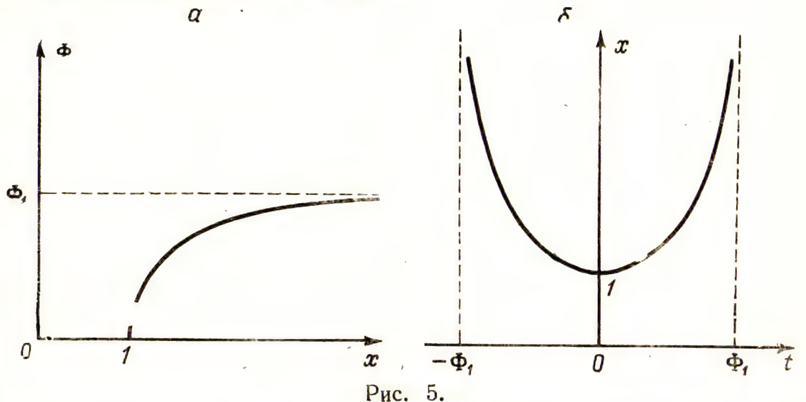


Рис. 5.

Упражнение. Пусть F и Φ — функции общего вида и Φ'^{-1} — функция, обратная к Φ'. Показать, что графики экстремалей функционала, соответствующего функции

$$L(x, v) = v \int F\left(x^{-1} \Phi'^{-1}(v^{-1})\right) dv^{-1},$$

удовлетворяют уравнению

$$\Phi\left(\frac{x}{k}\right)=\frac{t-\tau}{k},$$

в котором τ и k — произвольные параметры. Описать множество значений параметра k.

12. Функции, возникающие при изучении пучка экстремалей. Существует ли экстремаль f функционала

$$I(f)=\int_{\Delta} f^{\varkappa}(t)\left(1+f'^2(t)\right)^{1/2}dt,$$

удовлетворяющая условиям

$$f(a)=\xi,\quad f(b)=\eta,\quad \xi,\ \eta>0;$$

как много таких экстремалей? Чтобы ответить на эти вопросы, изучим множество экстремалей $M_{a\xi}$, удовлетворяющих лишь одному условию

$$f(a)=\xi,$$

т. е. *пучок экстремалей*, графики которых проходят через точку (a, ξ). Этой задаче посвящена вся оставшаяся часть параграфа. Пучок $M_{a\xi}$ будет изучен несколько подробнее, чем это нужно для ответа на вопрос, поставленный в начале пункта. Установленные нами факты не окажутся, однако, лишними; они будут в полном объеме использованы в дальнейшем.

Таблица 1

$\varkappa$	Функция	Область определения	Множество значений	Характерные свойства
$0>\varkappa$	Ψ	$(0, 1]$	$[0, \infty)$	$\Psi'<0$
	θ	$(0, 1)$	$(-\infty, -\Phi_0)$	$\theta'<0$
	Ω	$\emptyset$	$\emptyset$	
	Y	$[0, \infty)$	$(0, 1]$	$Y'(0)=0$, $Y'(v)<0$ при $v>0$
	T	$[0, \infty)$	$[1, \infty)$	$T'>0$
$0<\varkappa\leqslant 1$	Ψ	$[1, \infty)$	$[0, \gamma]$	Имеет абсолютный максимум в точке x_*, $x_*>1$; $\gamma=\Phi'(x_*)$; на интервале $[1, x_*)$ $\Psi'>0$, на интервале (x_*, ∞) $\Psi'<0$; $\Psi(1)=0$, $\Psi(\infty)=0$
	θ	$(1, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$\theta'<0$, $\theta(x_*)=0$
	Ω	$(1, \infty)$	$(0, \infty)$	$\Omega'<0$, $\Omega(x)>x^{-1}$, $x\Omega(x)\to 1$ при $x\to\infty$
	Y	$[0, \infty)$	$[1, \infty)$	$Y'(0)=0$, $Y'(v)>0$ при $v>0$
	T	$[0, \infty)$	$[0, \gamma]$	Имеет абсолютный максимум в точке γ^{-1}; на интервале $[0, \gamma^{-1})$ $T'>0$, на интервале (γ^{-1}, ∞) $T'<0$; $T(0)=0$, $T(\infty)=0$
$1<\varkappa$	Ψ	То же, что при $0<\varkappa\leqslant 1$		
	θ	$(1, \infty)$	$(-\Phi_1, \infty)$	То же, что при $0<\varkappa\leqslant 1$
	Ω	(x_1, ∞)	$(0, \infty)$	x_1 определено уравнением $\theta(x_1)=\Phi_1$, $x_1<x_*$; $\Omega'<0$, $\Omega(x)>x^{-1}$, $x\Omega(x)\to 1$ при $x\to\infty$
	Y, T	То же, что при $0<\varkappa\leqslant 1$		

При исследовании геометрических свойств пучка $M_{\alpha\xi}$ возникнет ряд функций, стандартным образом связанных с функцией Ф. Речь идет о функциях

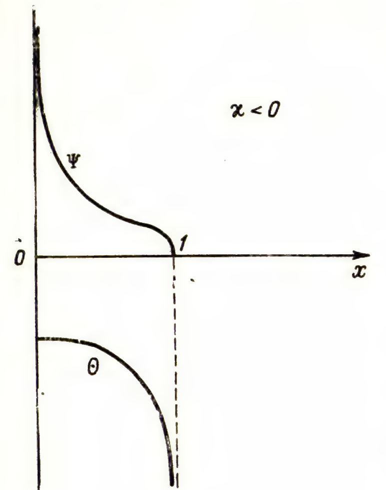


Рис. 6.

$$\Psi(x) = x^{-1}\Phi(x),$$
$$\theta(x) = -\Phi(x) + x\Phi'(x),$$
$$\Omega(x) = x^{-1}\theta^{-1}(-\theta(x)),$$
$$Y(v) = \Phi^{-1}\left(\operatorname{sign}\varkappa\,\frac{1}{v}\right),$$
$$T(v) = \Psi(Y(v)).$$

Поведение этих функций зависит от вида функции Ф, т. е. от числа $\varkappa$; их основные свойства собраны в табл. 1; графики функций Ψ, θ, Ω соответственно при $\varkappa < 0$, $0 < \varkappa \leqslant 1$, $1 < \varkappa$ приведены на рис. 6, 7, 8, функций Y и T приведены на рис. 9, 10. При желании читатель может с этого момента перейти к последующим пунктам, возвращаясь к указанным таблице и рисункам по мере необходимости. Подробный вывод сведений, представленных в таблице и на рисунках, можно рассматривать как упражнение. Приведенные ниже комментарии не дают исчерпывающего вывода этих сведений, но, по-видимому, разъясняют все места, которые могли бы вызвать затруднения.

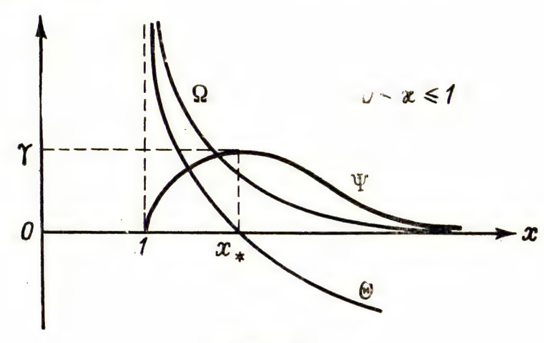


Рис. 7.

Отметим формулы, связывающие производные функций Ψ, θ, Ω:

$$\Psi'(x) = x^{-2}\theta(x),$$
$$\theta'(x) = x\Phi''(x),$$
$$x\Omega(x)\,\Phi''(x\Omega(x))\,\Omega'(x) = -\Phi''(x) - \Omega^2(x)\,\Phi''(x\Omega(x)).$$

Последняя из этих формул выводится следующим образом. Функция Ω удовлетворяет соотношению

$$\theta(x\Omega(x)) = -\theta(x).$$

Продифференцируем его:

$$\theta'(x\Omega(x))(\Omega(x) + x\Omega'(x)) = -\theta'(x),$$

откуда

$$\theta'(x\Omega(x))\,x\Omega'(x) = -\theta'(x) - \Omega(x)\,\theta'(x\Omega(x)).$$

Остается подставить сюда выражение для θ'.

Из формулы для производной видно, что θ — строго убывающая функция: $\theta'(x) = x\Phi''(x) < 0$. Легко вычислить значения функции θ на границе области определения и тем самым найти множество ее значений:

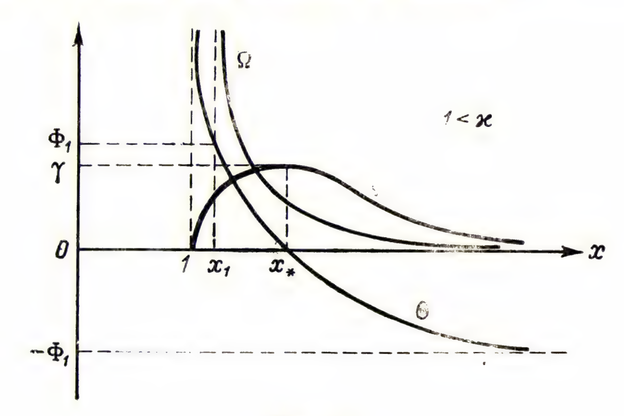


Рис. 8.

1) $\varkappa < 0$: $\theta(+0) = -\Phi_0$, при $x \to 1$ $\theta(x) \sim \Phi'(x) \sim -[2|\varkappa|(1-x)]^{-1/2} \to -\infty$;

2) $0 < \varkappa \leqslant 1$: при $x \to 1$ $\theta(x) \sim [2\varkappa(x-1)]^{-1/2} \to +\infty$, при $x \to \infty$ и $\varkappa < 1$ $\theta(x) \sim \dfrac{-\varkappa}{1-\varkappa}\, x^{1-\varkappa} \to -\infty$, при $x \to \infty$ и $\varkappa = 1$ $\theta(x) \sim -\ln x \to -\infty$;

3) $1 < \varkappa$: при $x \to 1$ $\theta(x) \sim \Phi'(x) \sim [2\varkappa(x-1)]^{-1/2} \to +\infty$, $\theta(\infty) = -\Phi_1$.

При $\varkappa < 0$ функция θ отрицательна, при $0 < \varkappa$ функция θ меняет знак и имеет (единственный) корень — обозначим его x_*.

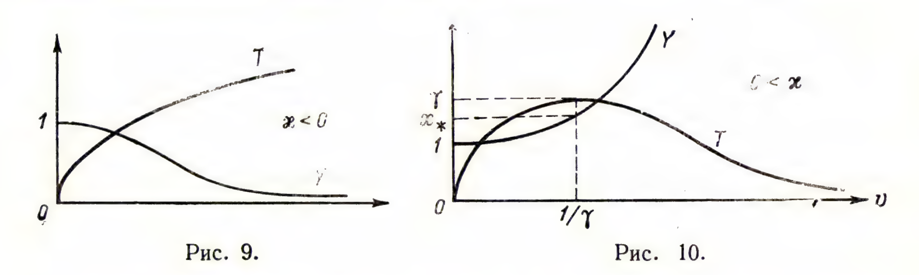


Рис. 9. Рис. 10.

Из формулы $\Psi'(x) = x^{-2}\theta(x)$ следует, что при $\varkappa < 0$ Ψ — строго убывающая функция, при $\varkappa > 0$ имеет строгий положительный максимум в точке x_*. Вычислив значения функции Ψ на границе области определения (не станем останавливаться на этом), нетрудно убедиться, что x_* — точка абсолютного максимума. Если $\gamma = \Psi(x_*)$, то $\gamma = \dfrac{1}{x_*}\Phi(x_*) = \Phi'(x_*)$.

Обратимся к функции Ω. При $\varkappa < 0$ функция $-\theta(x)$ положительна; так как θ^{-1} определена лишь на интервале $(-\infty, -\Phi_0)$, то $\Omega(x) = \dfrac{1}{x}\theta^{-1}(-\theta(x))$ не определена вовсе. При $0 < \varkappa \leqslant 1$ функция Ω определена там же, где и θ, ибо значения θ, а тем самым область определения θ^{-1}, — вся ось. Значения функции Ω положительны, поэтому последняя из трех формул с производными показывает, что $\Omega' < 0$. Значения функции Ω на границе области определения

вычисляются обычным образом. Оценка $\Omega(x) > x^{-1}$ очевидна. Из соотношения $\theta(x\Omega(x)) = -\theta(x)$ следует, что при $x \to \infty$ $\theta(x\Omega(x)) \to +\infty$, так что $x\Omega(x) \to 1$. Наконец, если $1 < \varkappa$, область определения функции Ω характеризуется неравенством $-\Phi_1 < -\theta(x)$, т. е. $\theta(x) < \Phi_1$, откуда следует, что эта область определения — интервал (x_1, ∞), где $\theta(x_1) = \Phi_1$. Так как $\Phi_1 > 0$, то $x_1 < x_*$. Дальнейшие рассуждения те же, что и при $0 < \varkappa \leqslant 1$.

Функцию Y можно явно вычислить:

$$\Phi'(x) = \operatorname{sign}\varkappa\left(x^{2\varkappa} - 1\right)^{-1/2}, \quad Y(v) = \Phi'^{-1}\left(\operatorname{sign}\varkappa \cdot v^{-1}\right) = \left(1 + v^2\right)^{1/2\varkappa}.$$

Из полученной формулы непосредственно вытекают все указанные в таблице свойства функции Y. Если $\varkappa > 0$, то $Y(\gamma^{-1}) = x_*$.

Функция T отличается от Ψ монотонной заменой аргумента, поэтому при $\varkappa < 0$ функция T монотонна, при $\varkappa > 0$ функция T имеет абсолютный максимум. Остальные объявленные свойства функции T получаются, если вычислить ее значения на границе области определения и заметить, кроме того, что при $\varkappa > 0$

$$T(\gamma^{-1}) = \Psi\left(Y\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right) = \Psi(x_*) = \gamma.$$

13. Пучок экстремалей при $\varkappa < 0$. Экстремали пучка $M_{a\xi}$ удобно нумеровать параметром

$$v = f'(a),$$

значением производной экстремали в точке a. Обозначим экстремаль пучка $M_{a\xi}$, соответствующую параметру v, через f_v. Функция f_v дается формулой

$$f_v(t) = k\Phi^{-1}\left(\frac{|t-\tau|}{k}\right),$$

в которой k и τ связаны соотношением

$$\Phi\left(\frac{\xi}{k}\right) = \frac{|a-\tau|}{k}$$

между собой и соотношением

$$v = \begin{cases} \operatorname{sign}(a-\tau)\dfrac{1}{\Phi'\left(\dfrac{\xi}{k}\right)}, & a \neq \tau; \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & a = \tau, \end{cases}$$

с параметром v. Вместо k удобно пользоваться параметром $y = \xi k^{-1}$: $y \in (0, 1]$, если $\varkappa < 0$; $y \in [1, \infty)$, если $\varkappa > 0$. Перепишем три последние формулы, вводя y:

$$f_v(t) = \xi\frac{1}{y}\Phi^{-1}\left(\frac{|t-\tau|}{\xi}y\right),$$

$$\Phi(y) = \frac{|a-\tau|}{\xi}y,$$

$$v = \begin{cases} \operatorname{sign}(a-\tau)\dfrac{1}{\Phi'(y)}, & a \neq \tau; \\ 0, & a = \tau. \end{cases}$$

Выразим y и τ через v. Параметр y — однозначная четная функция от v:

$$y = Y(|v|).$$

Параметр $\tau - a$ — нечетная функция от v:

$$\operatorname{sign}(\tau - a) = -\operatorname{sign} v \operatorname{sign}\varkappa, \quad |\tau - a| = \xi T(|v|).$$

Выражение для экстремали f_v можно преобразовать следующим образом:

$$f_v(t)=\frac{\xi}{y}\,\Phi^{-1}\left(\frac{\xi}{y}\,|\,(t-a)-(\tau-a)\,|\right)=$$
$$=\frac{\xi}{y}\,\Phi^{-1}\left(\left|\operatorname{sign} v \operatorname{sign} \varkappa \Phi(y)+\frac{y}{\xi}(t-a)\right|\right).$$

Геометрические свойства пучка $M_{a\xi}$ существенно различны при $\varkappa<0$ и $0<\varkappa$. Далее в этом пункте предполагается, что $\varkappa<0$. Графики экстремалей пучка изображены на рис. 11. Поясним этот рисунок. При $\varkappa<0$ $\operatorname{sign}(\tau-a)=\operatorname{sign} v$; с учетом строгой монотонности функции T (см. рис. 9) это означает, что τ — координата оси симметрии графика экстремали — строго возрастающая функция v, значения которой исчерпывают всю ось. При $v=0$ $\tau=a$. Параметр $y=\frac{\xi}{k}$ — четная функция v, принимающая максимальное значение при $v=0$ и обращающаяся в нуль на бесконечности. Это означает, что при изменении v от $-\infty$ до 0 экстремаль сокращается, становится наименьшей при $v=0$, а затем, при изменении v от 0 до ∞, вновь расширяется. Интервал определения экстремали f_v

$$(\tau-k\Phi_0,\ \tau+k\Phi_0)=$$
$$=\left(a+\xi\left[\operatorname{sign} vT(|v|)-\frac{\Phi_0}{Y(|v|)}\right],\ a+\xi\left[\operatorname{sign} vT(|v|)+\frac{\Phi_0}{Y(|v|)}\right]\right).$$

Его граничные точки — монотонно возрастающие функции v:

$$\left(a+\xi\left[\operatorname{sign} v\,T(|v|)\mp\frac{\Phi_0}{Y(|v|)}\right]\right)'=\xi\left[T'(|v|)\pm\frac{\Phi_0 \operatorname{sign} v}{Y^2(|v|)}Y'(|v|)\right]=$$
$$=\frac{\xi}{Y^2(|v|)}Y'(|v|)\,[\theta(|v|)\pm\Phi_0 \operatorname{sign} v]>0,$$

так как $Y'<0$ и $\theta<-\Phi_0$. Левая граничная точка возрастает от $-\infty$ до a, правая граничная точка возрастает от a до $+\infty$.

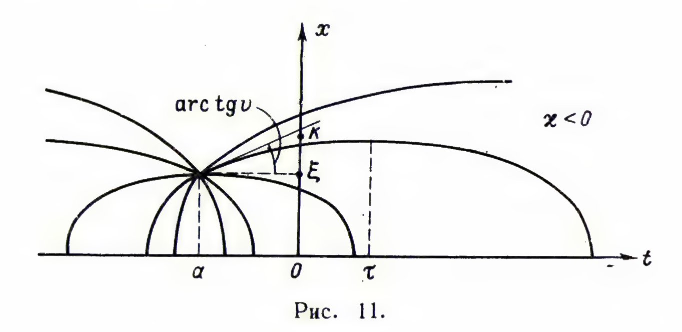


Рис. 11.

Пусть $b>a$. При $v<v_0$ интервал, на котором определена экстремаль, лежит левее точки b; при $v>v_0$ интервал, на котором определена экстремаль, содержит интервал $[a, b]$. Рассмотрим значение $f_v(b)$ экстремали f_v при $v>v_0$ в точке b как функцию от v, считая b фиксированным. Обозначим эту функцию через F: $F(v)=f_v(b)$. Вычислим производную функции F. Наряду с производной F' по собственному аргументу будет рассматриваться производная сложной функции

$$F_y(v)\equiv\frac{d}{dy}F(\operatorname{sign} v\,Y^{-1}(y))=\operatorname{sign} v\,F'(v)\,\frac{1}{Y'(v)}.$$

Воспользуемся соотношением

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=\left|\operatorname{sign} v\cdot\operatorname{sign}\varkappa\Phi(y)+\frac{y}{\xi}|\Delta|\right|=$$
$$=\operatorname{sign}(b-\tau)\left[\operatorname{sign} v\cdot\operatorname{sign}\varkappa\Phi(y)+\frac{y}{\xi}|\Delta|\right].$$

Продифференцируем его по y:

$$\frac{1}{\xi}(F(v)+yF_y(v))\,\Phi'\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=\operatorname{sign}(b-\tau)\left[\operatorname{sign} v\cdot\operatorname{sign}\varkappa\Phi'(y)+\frac{|\Delta|}{\xi}\right].$$

Комбинируя эти равенства, получим формулу для производной F_y

$$\frac{y^2}{\xi}F_y(v)\,\Phi'\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=\operatorname{sign}(b-\tau)\operatorname{sign} v\cdot\operatorname{sign}\varkappa\theta(y)-\theta\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right).$$

Учтем теперь, что $\varkappa<0$, и обсудим три случая:

1) $\tau<a$. В этом случае $\tau<b$, $v<0$ и тем самым

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=\Phi(y)+\frac{|\Delta|}{\xi}y>\Phi(y).$$

В силу монотонности Φ получаем $\frac{y}{\xi}F(v)<y$.

С другой стороны, формула для производной F_y дает

$$\frac{y^2}{\xi}F_y(v)\,\Phi'\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=\theta(y)-\theta\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right).$$

Учитывая монотонность функции θ, получаем $F_y(v)>0$, откуда $F'(v)>0$.

2) $a<\tau<b$. В этом случае $v>0$ и тем самым

$$\frac{y^2}{\xi}F_y(v)\Phi'\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=-\theta(y)-\theta\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)>0.$$

Отсюда вытекает $F_y(v)<0$ и $F'(v)>0$.

3) $b<\tau$. В этом случае $v>0$ и тем самым

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi}F(v)\right)=\Phi(y)-\frac{y}{\xi}|\Delta|<\Phi(y),$$

откуда $(y/\xi)\cdot F(v)>y$. Формула для производной имеет тот же вид, что и в случае 1), поэтому $F_y(v)<0$, так что вновь $F'(v)>0$.

Таким образом, во всех случаях $F'(v)>0$.

Если $v\to+\infty$, то $\tau\to+\infty$ и $y\to 0$, поэтому

$$F(v)=\frac{\xi}{y}\Phi^{-1}\left(\Phi(y)-\frac{y}{\xi}|\Delta|\right)\sim\frac{\zeta}{y}\Phi^{-1}\left(\Phi_0-\frac{y}{\xi}|\Delta|\right)\to\infty$$

при $v\to+\infty$.

Итак, F — строго возрастающая функция v, $v>v_0$. Ее значения заполняют интервал $(0, \infty)$.

Отсюда следует, что *существует единственная экстремаль, график которой проходит через заданную пару точек* (a, ξ) *и* (b, η).

В п. 28 будет доказано, что *эта экстремаль — точка строгого минимума функционала* I *на множестве* Ω, *состоящем из положительных функций класса* $C^1_{\xi\eta}(\Delta)$.

14. Огибающая пучка. Существенно иначе обстоит дело, если $\varkappa>0$. На этот раз *не для всякой пары точек* (a, ξ), (b, η) *найдется экстремаль, график которой проходит через эти точки. Более того, если подобная экстремаль найдется, она, как правило, не единственна; как правило, таких экстремалей*

две. При этом лишь одна из этих экстремалей оказывается точкой экстремума (минимума) в соответствующей экстремальной задаче, вторая экстремаль не является точкой минимума.

Геометрической причиной столь разного поведения экстремалей при $\varkappa < 0$ *и* $\varkappa > 0$ *служит тот факт, что графики пучка* $M_{a\xi}$ *при* $\varkappa > 0$ *имеют огибающую, а при* $\varkappa < 0$ *не имеют ее.*

Напомним, что *огибающая* однопараметрического множества кривых, уравнения которых имеют вид

$$F(t, x, v) = 0,$$

v — параметр, *характеризуется парой соотношений*

$$F(t, x, v) = 0, \quad F_v(t, x, v) = 0.$$

Ее уравнение можно получить, исключая из этих соотношений параметр. В нашем случае уравнения графиков экстремалей можно записать следующим образом:

$$\Phi\left(\frac{x}{\xi} y\right) = \frac{|t - \tau|}{\xi} y,$$

подробнее:

$$\Phi\left(\frac{x}{\xi} y\right) = \operatorname{sign}(t - \tau)\left[\operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa \Phi(y) + \frac{t - a}{\xi} y\right].$$

Вместо производной F_v можно приравнять нулю производную F_ν:

$$\frac{x}{\xi} \Phi'\left(\frac{x}{\xi} y\right) = \operatorname{sign}(t - \tau)\left[\operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa \Phi'(y) + \frac{t - a}{\xi}\right].$$

Комбинируя пару этих равенств, приходим к уравнениям

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{x}{\xi} y\right) = \operatorname{sign}(t - \tau)\left[\operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa \Phi(y) + \frac{t - a}{\xi} y\right], \\ \theta\left(\frac{x}{\xi} y\right) = \operatorname{sign}(t - \tau) \cdot \operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa \theta(y). \end{cases}$$

Эти уравнения могут привести к содержательному множеству лишь при $\operatorname{sign}(t - \tau) \cdot \operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa = -1$. В самом деле, пусть $\operatorname{sign}(t - \tau) \operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa = 1$, тогда

$$\theta\left(\frac{x}{\xi} y\right) = \theta(y).$$

Ввиду монотонности θ отсюда следует $x = \xi$. С учетом этого равенства первое из уравнений для огибающей дает

$$\Phi(y) = \Phi(y) + \operatorname{sign}(t - \tau)\frac{t - a}{\xi} y, \quad \text{т. е. } ' = a.$$

Полученная точка $x = \xi$, $t = a$ — особая точка пучка; решения выведенных уравнений, для которых $t = a$, должны быть выброшены из рассмотрения; они не могут принадлежать огибающей.

Таким образом, уравнения, характеризующие огибающую, можно переписать проще:

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{x}{\xi} y\right) = -\Phi(y) + \operatorname{sign}(t - \tau)\frac{t - a}{\xi} y, \\ \theta\left(\frac{x}{\xi} y\right) = -\theta(y), \\ \operatorname{sign}(t - \tau) \cdot \operatorname{sign} v \cdot \operatorname{sign} \varkappa = -1. \end{cases}$$

При $\varkappa < 0$ равенство $\theta\left(\frac{x}{\xi}y\right) = -\theta(y)$ невозможно, поэтому *при $\varkappa < 0$ огибающая отсутствует.*

Ниже в этом пункте $\varkappa > 0$. При этом $\operatorname{sign}(t-\tau) = -\operatorname{sign} v$. Равенство $\theta\left(\frac{x}{\xi}y\right) = -\theta(y)$ можно решить относительно x:

$$x = \xi\Omega(y), \quad \text{где } \Omega(y) = \frac{1}{y}\theta^{-1}(-\theta\ y)).$$

Теперь легко выписать параметрическое представление для огибающей

$$x = \xi\Omega(y), \ t - a = -\operatorname{sign} v \cdot \xi\Gamma(y).$$

Здесь

$$\Gamma(y) = \Psi(y) + \frac{1}{y}\Phi(y\Omega(y)).$$

Фигурирующие здесь функции Ω и Γ определены при $y > 1$, если $\varkappa \leqslant 1$. Если же $1 < \varkappa$, то эти функции определены лишь на интервале (x_1, ∞) (см. табл. 1).

Обозначим полученную огибающую пучка $M_{a\xi}$ через $C_{a\xi}$. Из параметрического представления видно, что кривая $C_{a\xi}$ симметрична относительно прямой $t = a$. Правая ветвь огибающей отвечает экстремалям, у которых $v < 0$, левая ветвь — экстремалям, у которых $v > 0$. Покажем, что огибающая может быть описана уравнением

$$\frac{x}{\xi} = A\left(\frac{|t-a|}{\xi}\right),$$

где $A(v) = \Omega(\Gamma^{-1}(v))$, $v > 0$. A — строго возрастающая функция, значения которой пробегают интервал $(0, \infty)$. Достаточно убедиться, что Ω и Γ — строго убывающие функции, множества значений которых совпадают с интервалом $(0, \infty)$. Функция Ω исследована выше (см. табл. 1). Рассмотрим функцию Γ

$$\Gamma'(y) = \frac{\theta(y) - \Phi(y\Omega(y)) + y\Phi'(y\Omega(y))(\Omega(y) + y\Omega'(y))}{y^2} =$$

$$= \frac{\theta(y) + \theta(y\Omega(y)) + y^2\Phi'(y\Omega(y))\Omega'(y)}{y^2} = \Phi'(y\Omega(y))\Omega'(y)$$

Эта формула показывает, что Γ — строго убывающая функция. Если $y \to \infty$, то согласно табл. 1 $y\Omega(y) \to 1$, поэтому при $y \to \infty$

$$\Gamma(y) = \Psi(y) + \frac{1}{y}\Phi(y\Omega(y)) \sim \Psi(y) \to 0.$$

Далее следует различать два случая:

1) $\varkappa \leqslant 1$: $y \in (1, \infty)$; при $y \to 1$ $y\Omega(y) \sim \Omega(y) \to +\infty$, поэтому

$$\Gamma(y) \sim \Phi(\Omega(y)) \to +\infty;$$

2) $1 < \varkappa$: $y \in [x_1, \infty)$; при $y \to x_1$ $y\Omega(y) \sim x_1\Omega(y) \to +\infty$, поэтому

$$\Gamma(y) \sim \Psi(x_1) + \frac{1}{x_1}\Phi(x_1\Omega(y)) \to +\infty.$$

График огибающей см. на рис. 12, там же изображены графики пучка $M_{a\xi}$ при $\varkappa > 0$.

15. Пучок экстремалей при $\varkappa > 0$. Рассмотрим однопараметрическое множество экстремалей, имеющих ось симметрии $t = 0$. Уравнения графиков этих экстремалей имеют вид

$$\Phi\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{|t|}{k}, \quad k > 0;$$

их можно получить преобразованием подобия из графика стандартной экстремали. Все они касаются лучей E^+ и E^-, проходящих через точку (0, 0) и касающихся стандартных экстремалей (рис. 13). Охарактеризуем лучи E^+ и E^-. Координата x точки пересечения луча с уравнением $\lambda x = t$ и графика стандартной экстремали (уравнение $\Phi(x) = |t|$) удовлетворяет уравнению $\Phi(x) = \lambda |x|$. Если $\lambda > 0$, то $x > 0$, и уравнение принимает вид $\Psi(x) = \lambda$. Отсюда ясно, что для E^+ λ равно максимальному значению функции Ψ: $\lambda = \gamma$ (см. табл. 1), при этом $x = x_*$. Абсцисса t_* точки касания луча E^+ и графика стандартной экстремали равна $t_* = \gamma x_* = \Phi(x_*)$.

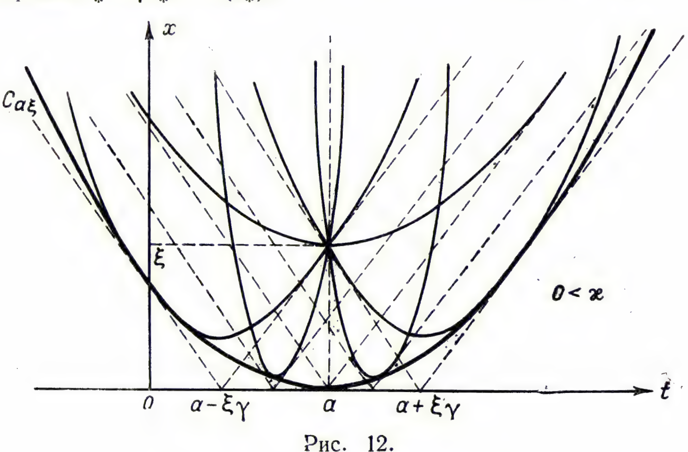


Рис. 12.

Обозначим через $E_\tau^\pm$ лучи $\{(t+\tau, x): (t, x) \in E^\pm\}$. Графики экстремалей пучка $M_{a\xi}$ изображены на рис. 12. Точка (a, ξ) лежит на лучах $E^+_{a-\xi\gamma}$ и $E^-_{a+\xi\gamma}$. Графики должны лежать в области, ограниченной интервалом $[a-\xi\gamma, a+\xi\gamma]$ оси абсцисс и лучами $E^-_{a-\xi\gamma}$, $E^+_{a+\xi\gamma}$.

При $\varkappa > 0$

$$\operatorname{sign}(\tau - a) = -\operatorname{sign} v, \quad |\tau - a| = \xi T(|v|).$$

С учетом свойств функции T (см. рис. 10) это означает, что $\tau - a$ (τ — координата оси симметрии графика) монотонно возрастает с ростом v, пока v меняется на интервале $(-\infty, -1/\gamma)$, при этом $\tau - a = 0$, если $v = -\infty$; достигнув в точке $-\gamma^{-1}$ максимума, равного $\gamma\xi$, $\tau - a$ монотонно убывает до $-\gamma\xi$, когда v меняется на интервале $(-\gamma^{-1}, \gamma)$; $\tau - a = 0$ при $v = 0$; на интервале (γ^{-1}, ∞) $\tau - a$ вновь монотонно возрастает до нуля. Параметр y:

$$y = Y(|v|)$$

принимает минимальное значение при $v = 0$ и обращается в бесконечность при $v \to \infty$.

Рис. 13.

Минимальному значению y соответствует экстремаль с максимальным коэффициентом подобия $k = \xi / y$, при $v \to \infty$ график экстремали вырождается в луч $\{(t, x): t = a, x > 0\}$.

На рис. 12 показана также огибающая $C_{a\xi}$. Взаимное расположение графиков экстремалей и огибающей характеризуется следующими основными положениями:

А. *Через точки, лежащие под огибающей, графики экстремалей пучка $M_{a\xi}$ не проходят; через точку, лежащую на огибающей, проходит график единственной экстремали, через каждую точку, лежащую над огибающей (исключая точки оси симметрии), проходят графики двух экстремалей.*

Б. *Абсцисса точки касания одного из графиков, проходящих через точку, лежащую над огибающей, и самой огибающей, лежит в интервале (a, b); абсцисса точки касания другого графика лежит вне интервала $[a, b]$.*

План доказательства утверждений А и Б одинаков при $\varkappa \leqslant 1$ и $\varkappa > 1$, но некоторые детали, возникающие при переборе вариантов, оказываются различными из-за того, что при $\varkappa \leqslant 1$ и $\varkappa > 1$ различны области определения экстремалей. Мы ограничимся случаем $\varkappa \leqslant 1$; заинтересованный читатель без труда перенесет изложенные ниже построения на случай $1 < \varkappa$.

Выше, в п. 13, были получены следующие формулы:

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \operatorname{sign}(b-\tau)\left[\operatorname{sign} v \Phi(y) + \frac{|\Delta|}{\xi} y\right],$$

$$\frac{y^2}{\xi} F_y(v) \Phi'\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \operatorname{sign}(b-\tau) \operatorname{sign} v \theta(y) - \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right),$$

$$F_y(v) = \operatorname{sign} v F'(v) \frac{1}{Y'(v)}.$$

Переписывая общие формулы, мы положили $\operatorname{sign} \varkappa = 1$. Покажем, опираясь на эти формулы, что:

а) $F(v) \to \infty$ при $|v| \to \infty$;

б) производная F' имеет единственный корень $\tilde{v}$; при $v < \tilde{v}$ $F'(v) < 0$, при $v > \tilde{v}$ $F'(v) > 0$.

Из утверждений а) и б) следует, что $\tilde{v}$ — точка абсолютного минимума функции F. Мы убедимся также, что

в) $F(\tilde{v}) = \xi A\left(\frac{|\Delta|}{\xi}\right)$.

Напомним, что функция A определяет уравнение огибающей $C_{a\xi}$

$$\frac{x}{\xi} = A\left(\frac{|t-a|}{\xi}\right),$$

так что точка $(b, F(\tilde{v}))$ лежит на огибающей.

Легко видеть, что утверждение A вытекает из утверждений а), **б) и в).**

Если $y \to \infty$, то

$$\operatorname{sign} v \Phi(y) + \frac{|\Delta|}{\xi} y \sim \frac{|\Delta|}{\xi} y \to \infty,$$

поэтому

$$F(v) = \frac{\xi}{y} \Phi^{-1}\left(\operatorname{sign}(b-\tau)\left[\operatorname{sign} v \Phi(y) + \frac{|\Delta|}{\xi} y\right]\right) \sim$$

$$\sim \frac{\xi}{y} \Phi^{-1}\left(\frac{|\Delta|}{\xi} y\right) \sim \frac{\xi}{y}\left[(1-\varkappa)\frac{|\Delta|}{\xi} y\right]^{\frac{1}{1-\varkappa}} \to +\infty.$$

Здесь предположено, что $\varkappa < 1$, и использована формула

$$\Phi^{-1}(t) \sim [(1-\varkappa) t]^{\frac{1}{1-\varkappa}} \text{ при } t \to \infty,$$

которая вытекает из асимптотики

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{1-\varkappa} x^{1-\varkappa} \text{ при } x \to \infty.$$

Если $\varkappa = 1$, то $\Phi(x) \sim \ln x$ и $\Phi^{-1}(t) \sim e^t$ и окончательный результат тот же: $F(v) \to +\infty$ при $v \to \infty$. Утверждение а) доказано.

Обратимся к утверждению б). Предположим вначале, что $b > a + \gamma\xi$. В этом случае $\operatorname{sign}(b - \tau) = 1$.

1) Пусть $v < 0$, тогда

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = -\Phi(y) + \frac{|\Delta|}{\xi} y,$$

$$\frac{y^2}{\xi} F_y(v)\, \Phi'\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = -\theta(y) - \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right).$$

Функция F' имеет корень в точке, определяемой уравнением

$$-\theta(y) = \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right), \quad y = Y(-v).$$

Воспользуемся определением Ω: $-\theta(y) = \theta(y\Omega(y))$ и перепишем уравнение следующим образом:

$$\theta(y\Omega(y)) = \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right).$$

В силу монотонности θ это уравнение упрощается:

$$\Omega(y) = \frac{1}{\xi} F(v).$$

Решения полученного уравнения совпадают с корнями функции F'. Покажем, что это уравнение имеет и притом единственное решение.

Если $v \to -\infty$, то согласно а) имеем $F(v) \to +\infty$; если $v \to 0$, то $y \to 1$ и $F(v) \to \xi\Phi^{-1}\left(\frac{|\Delta|}{\xi}\right)$. Так как $\Omega(y) \to 0$ при $v \to -\infty$ и $\Omega(y) \to \infty$ при $v \to 0$, то графики функций $\Omega(Y(-v))$ и $\frac{1}{\xi} F(v)$ пересекаются, так что уравнение $\Omega(y) = \frac{1}{\xi} F(v)$ имеет решение.

Рассмотрим на квадранте $\{(v, z)\colon v<0,\ z>0\}$ кривую γ: $z = \Omega(Y(-v))$, график функции $\Omega(Y(-v))$. Кривая γ разбивает квадрант на области Ω_+ и Ω_-: на первой $z > \Omega(Y(-v))$, на второй $z < \Omega(Y(-v))$. Формула

$$\frac{y^2}{\xi} F_y(v) (\Phi'\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = -\theta(y) - \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \theta(y\,\Omega(y)) - \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right)$$

показывает, что $F'(v) < 0$ при тех v, при которых график функции $\frac{1}{\xi} F(v)$ лежит в Ω_+, и $F'(v) > 0$ при тех v, при которых график функции $\frac{1}{\xi} F(v)$ лежит в Ω_-. Обозначим какой-либо корень функции F' через v. Так как $\Omega'(\tilde{y}) < 0$, $\tilde{y} = Y(-\tilde{v})$, и $F'(\tilde{v}) = 0$, то при возрастании v в достаточно малой окрестности точки $\tilde{v}$ график функции $\frac{1}{\xi} F(v)$ пересекает кривую γ, переходя из области Ω_+ в область Ω_-. Если $\tilde{v}$ — наименьший из корней функции F', то график функции $\frac{1}{\xi} F(v)$, перейдя в точке $v = \tilde{v}$ из Ω_+ в Ω_-, уже не может в силу сказанного вернуться в Ω_+. Таким образом, корень $\tilde{v}$ единствен.

Итак, F' имеет на интервале $(-\infty, 0)$ единственный корень $\tilde{v}$; $F'(v) < 0$ при $v < \tilde{v}$, $F'(v) > 0$ при $v > \tilde{v}$.

2) Пусть $v > 0$, тогда

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \Phi(y) + \frac{|\Delta|}{\xi} y,$$

$$\frac{y^2}{\xi} F_y(v)\, \Phi'\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \theta(y) - \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right).$$

Первое из этих соотношений ввиду монотонности Φ дает

$$\frac{y}{\xi} F(v) > y.$$

Отсюда следует, что правая сторона второго соотношения положительна. Следовательно, $F_y(v) > 0$, так что $F'(v) > 0$.

Утверждение б) при $b > a + \gamma\xi$ доказано.

Обратимся к утверждению в). В точке $\tilde{v}$

$$\Phi\left(\frac{\tilde{y}}{\xi} F(\tilde{v})\right) = -\Phi(\tilde{y}) + \frac{|\Delta|}{\xi} \tilde{y},$$

$$\theta\left(\frac{\tilde{y}}{\xi} F(\tilde{v})\right) = -\theta(\tilde{y}).$$

Сравнивая эти соотношения с уравнением для огибающей, видим, что

$$F(\tilde{v}) = \xi A\left(\frac{|\Delta|}{\xi}\right).$$

Таким образом, при $b > a + \gamma\xi$ полностью доказано предложение A.

Что изменится в этом доказательстве, если $b < a + \gamma\xi$? На этот раз вместо возможностей 1) — 2) следует рассмотреть четыре возможности:

1′) $v < v_1$, v_1 соответствует равенству $\tau = b$; при этом $\tau < b$;

2′) $v_1 < v < v_2$, v_2 также соответствует равенству $\tau = b$; при этом $b < \tau$;

3′) $v_2 < v < 0$, при этом $\tau < b$;

4′) $v > 0$, при этом $\tau < b$.

Единственный корень $\tilde{v}$ производной F' удовлетворяет условию $\tilde{v} < v_1$. Существование такого корня при $v < v_1$ и его единственность в этом интервале устанавливаются теми же рассуждениями, что и в рассмотренном ранее случае 1), с единственным дополнением: следует установить, что

$$\Omega(y_1) > \frac{1}{\xi} F(v_1), \quad y_1 = Y(-v_1).$$

Так как $\tau = b$ при $v = v_1$, то

$$\Phi\left(\frac{y_1}{\xi} F(v_1)\right) = 0,$$

откуда $\frac{1}{\xi} F(v_1) = 1/y_1$. Согласно табл. 1 $\Omega(y) > y^{-1}$, так что, действительно, $\Omega(y_1) > (1/\xi) F(v_1)$. Производная F' меняет знак в точке $\tilde{v}$: $F'(v) < 0$ при $v < \tilde{v}$, $F'(v) > 0$ при $v > \tilde{v}$.

В интервалах, определяемых условиями 2′) — 4′), производная F' сохраняет знак: $F'(v) > 0$. Случай 4′) в точности повторяет случай 2) с тем же выводом: $F'(v) > 0$. В интервале 2′) получаем

$$\Phi\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \Phi(y) - \frac{|\Delta|}{\xi} y,$$

$$\frac{y^2}{\xi} F_y(v)\, \Phi'\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right) = \theta(y) - \theta\left(\frac{y}{\xi} F(v)\right).$$

Первое соотношение дает $(y/\xi) F(v) < y$, после чего из второго следует $F_y(v) < 0$, т. е. $F'(v) > 0$. На левой границе интервала 3′), так же, как на правой границе интервала 1′), $\tau = b$, а следовательно, $(1/\xi) F(v_2) = 1/y_2$ и $\Omega(y_2) > (1/\xi) F(v_2)$. Основные соотношения здесь те же, что и в интервале 1′), поэтому, так же, как при $v > \tilde{v}$, в интервале 1′) неравенство $\Omega(y) > (1/\xi) F(v)$ сохраняется и производная F' не обращается в нуль: $F'(v) > 0$.

Итак, утверждение A при $\varkappa \leq 1$ полностью доказано. Обратимся к утверждению Б. Через точку (b, η), лежащую над огибающей, проходят графики двух экстремалей $f_{v'}$ и $f_{v''}$, причем $v' < \tilde{v} < v''$, где $\tilde{v}$, $\tilde{v} < 0$, — корень производной F'. При доказательстве утверждения в) было установлено, что точка $\left(b, f_{\tilde{v}}(b)\right) = (b, F(\tilde{v}))$ лежит на огибающей, т. е. абсцисса точки касания графика экстремали $f_{\tilde{v}}$ и огибающей равна b.

В п. 14 при исследовании огибающей мы установили, что абсцисса t точки касания графика экстремали f_v и огибающей при $v < 0$ — строго убывающая функция y

$$t - a = \xi \Gamma(y),$$

и тем самым строго возрастающая функция v. Так как абсцисса точки касания графика экстремали $f_{v'}$ и огибающей больше a и $v' < \tilde{v}$, то она лежит в интервале (a, b). Если $v'' < 0$, то абсцисса точки касания графика экстремали и огибающей больше b; если же $v'' > 0$, то абсцисса точки касания меньше a; в обоих случаях она лежит вне интервала $[a, b]$. Утверждение Б доказано. Отметим, что график экстремали $f_{v''}(t)$ при $t \in (a, b)$ является более пологим и расположен над графиком экстремали $f_{v'}$.

Из двух экстремалей $f_{v'}$ *и* $f_{v''}$, *графики которых проходят через заданные точки* (a, ξ) *и* (b, η), *лишь одна, экстремаль* $f_{v''}$, *сообщает строгий экстремум* (а именно — минимум) *функционалу* I *на множестве* Ω, *состоящем из функций класса* $C^1_{\xi\eta}(\Delta)$, *принимающих положительные значения. Экстремаль* $f_{v'}$ *не является точкой экстремума.* Последнее утверждение будет доказано ниже, в п. 28.

16. Специальные случаи. Интеграл

$$\Phi(x) = \operatorname{sign} \varkappa \int_1^x \frac{dy}{\sqrt{y^{2\varkappa} - 1}}$$

выражается в элементарных функциях только при $\varkappa = 1/n$, n — целое. Случаи $n = -2, -1, 1, 2$ допускают простую интерпретацию. Остановимся на них отдельно.

1) Случаю $n = -1$, т. е. $\varkappa = -1$, отвечает функционал

$$I(f) = \int_\Delta \frac{1}{f(t)} \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt.$$

При этом

$$\Phi(x) = \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-2} - 1}} = \int_x^1 \frac{y\, dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Общий вид экстремали

$$f(t) = k\left[1 - \left(\frac{t - \tau}{k}\right)^2\right]^{1/2},$$

уравнение графика экстремали

$$x^2 + (t - \tau)^2 = k^2.$$

Таким образом, график экстремали — полуокружность с центром на прямой $x = 0$ (рис. 14). Из результатов п. 13 следует, что существует единственная экстремаль, график которой проходит через заданную пару точек. Эта экстремаль — точка минимума функционала на множестве $C^1_{\xi\eta}(\Delta)$. Ее легко построить

геометрически: центр полуокружности лежит в точке пересечения прямой $x=0$ и прямой, ортогонально пересекающей отрезок, соединяющий (a, ξ) и (b, η), в его центре.

Рассмотренный функционал допускает интересную геометрическую интерпретацию. Точки *аксиоматической плоскости Лобачевского* можно реализовать как точки евклидовой полуплоскости $\{(t, x), t \in \mathbf{R}, x > 0\}$, причем *длина кривой* на плоскости Лобачевского, которой соответствует при этой реализации кривая γ, будет даваться криволинейным интегралом

$$\int_\gamma \frac{1}{x} ds.$$

Если кривая γ является графиком функции $f: \Delta \to \mathbf{R}$, то длина кривой равна интегралу $I(f)$:

$$\int_\gamma \frac{1}{x} ds = \int_\Delta \frac{1}{f(t)} \sqrt{1+f'^2(t)}\, dt = I(f).$$

Кривые, реализующие кратчайшее расстояние между парой точек в геометрии Лобачевского, в нашей реализации — дуги полуокружностей с центрами на

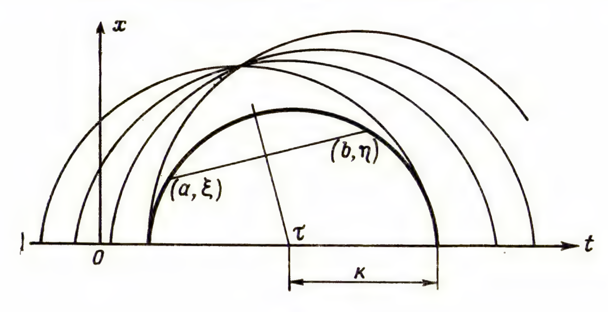


Рис. 14.

прямой $x=0$. Они, а также их вырождения при $k=\infty$, т. е. лучи $t=\tau$ изображают *прямые плоскости Лобачевского*. На рис. 14 изображен пучок полуокружностей, проходящих через заданную точку, расположенную вне заданной полуокружности, и не пересекающих эту полуокружность. На языке геометрии Лобачевского это соответствует *пучку прямых, проходящих через заданную точку, лежащую вне заданной прямой, и не пересекающих эту прямую, т. е. параллельных ей*. В геометрии Лобачевского прямая, проходящая через заданную точку, лежащую вне заданной прямой, и параллельная этой прямой, *не единственна*. Читателю, конечно, известно, что аксиоматика геометрии Лобачевского отличается от аксиоматики геометрии Евклида лишь этим моментом — неединственностью параллельной прямой.

2) Случаю $n=-2$, т. е. $\varkappa=-1/2$, соответствует функционал

$$I(f) = \int_\Delta \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \sqrt{1+f'^2(t)}\, dt.$$

Этот функционал уже рассматривался в связи с задачей о брахистохроне (см. п. 2). Функция Φ имеет вид

$$\Phi(x) = \int_x^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-1}-1}}.$$

Удобно перейти к новой переменной интегрирования

$$y = \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad 0 \leqslant \psi < \pi.$$

После простых вычислений получаем

$$\Phi(x)=\int_{\varphi}^{\pi}\sin^2\frac{\psi}{2}\,d\psi=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi),$$

где $x=\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $0\leqslant\varphi<\pi$. Отсюда следует, между прочим, что $\Phi_0=\pi/2$. В параметрической форме уравнение графика экстремали имеет вид

$$x=k\sin^2\frac{\varphi}{2},\quad t-\tau=k\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(\varphi-\sin\varphi)\right].$$

Кривая на плоскости, заданная подобными соотношениями, должна быть известна читателю; это есть *циклоида*, т. е. множество точек, которые описывают фиксированная точка окружности радиуса $k/2$, катящейся по прямой $x=0$. Существует единственная экстремаль, см. п. 13, график которой проходит через заданную пару точек (a, ξ) и (b, η). Эта экстремаль сообщает строгий минимум функционалу I. Итак, *брахистохрона существует и имеет форму циклоиды*.

3) Случаю $n=2$, т. е. $\varkappa=1/2$, соответствует функционал

$$I(f)=\int_{\Delta}\sqrt{f(t)}\sqrt{1+f'^2(t)}\,dt.$$

При этом

$$\Phi(x)=\int_1^x\frac{dy}{\sqrt{y-1}}=2\sqrt{x-1}.$$

Общий вид экстремали

$$f(t)=k\left[1+\left(\frac{t-\tau}{2k}\right)^2\right].$$

Уравнение графика экстремали:

$$(t-\tau)^2=4k(x-k),$$

т. е. *график экстремали — парабола, директриса которой — прямая* $x=0$. Экстремали пучка $M_{a\xi}$ имеют вид

$$f_v(t)=\frac{\xi}{y}\Phi^{-1}\left(\left|\operatorname{sign}v\Phi(y)+\frac{y}{\xi}(t-a)\right|\right),$$

причем $y=Y(|v|)=1+v^2$. Легко найти Φ^{-1}:

$$\Phi^{-1}(t)=1+(t/2)^2.$$

Поэтому

$$f_v(t)=\xi+v(t-a)+\frac{1+v^2}{4\xi}(t-a)^2.$$

Рассмотрим огибающую $C_{a\xi}$ пучка $M_{a\xi}$. Параметрическое представление огибающей:

$$x=\xi\Omega(y),\quad t-a=-\operatorname{sign}v\cdot\xi\Gamma(y).$$

Вычислим функции Ω и Γ. Найдем прежде всего θ:

$$\theta(x)=-\Phi(x)+x\Phi'(x)=\frac{2-x}{\sqrt{x-1}},$$

далее $\theta(x\Omega)=-\theta(x)$, откуда

$$\Omega(x)=\frac{1}{x-1}.$$

Функция Γ дается формулой

$$\Gamma(x)=\frac{\Phi(x)}{x}+\frac{1}{x}\Phi(x\Omega(x))=\frac{2}{\sqrt{x-1}}.$$

Следовательно, огибающая имеет параметрическое представление вида

$$x=\xi\frac{1}{y-1},\quad t-a=-\operatorname{sign}v\frac{2\xi}{\sqrt{y-1}}.$$

Исключая параметр, получаем

$$4\xi x = (t-a)^2,$$

так что огибающая $C_{a\xi}$ — также парабола.

Если точка (b, η) лежит над огибающей, то существуют две экстремали $f_{v'}$ и $f_{v''}$, $v' < v''$, графики которых проходят через точки (a, ξ) и (b, η). Вторая из них $f_{v''}$, т. е. та экстремаль, график которой расположен выше и является более пологим, является точкой строгого минимума функционала I.

В п. 77 будет показано, что графики экстремалей рассматриваемого функционала суть кривые, по которым движутся на плоскости в поле потенциальной энергии $V = -x$ материальные точки. Направление оси x совпадает с направлением силы, действующей на материальную точку («силы тяжести»), ось t ортогональна направлению этой силы. Множество всех кривых, по которым движутся на плоскости точки, нумеруется, как нетрудно убедиться, тремя параметрами. Множество графиков экстремалей функционала I содержит те из них, которые соответствуют фиксированной полной энергии. Пучок $M_{a\xi}$ соответствует траекториям материальных точек, выбрасываемых из точки (a, ξ) в различных направлениях с одной и той же полной энергией, т. е. с одной и той же величиной начальной скорости. Система координат выбрана так, что точка, выброшенная против направления действия силы, достигает точки $(a, 0)$. Огибающая, ограничивающая область, достижимую параболами пучка, называется *параболой безопасности*. Та парабола пучка, которая между точками (a, ξ) и (b, η) касается огибающей, называется *навесной*. Более пологая парабола называется *настильной*.

4) Случаю $n=1$, т. е. $\varkappa=1$, соответствует функционал

$$I(f) = \int_\Delta f(t) \sqrt{1+f'^2(t)}\, dt.$$

При этом

$$\Phi(x) = \int_1^x \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Удобно перейти к новой переменной интегрирования $y = \operatorname{ch} \psi$

$$\Phi(x) = \int_0^{\operatorname{arcch} x} d\varphi = \operatorname{arcch} x.$$

Таким образом $\Phi^{-1}(t) = \operatorname{ch} t$. Общий вид экстремали

$$f(t) = k \operatorname{ch} \frac{t-\tau}{k}.$$

Ее график — *цепная линия*.

Интеграл $I(f)$ равен деленной на 2π площади поверхности, которая образуется в $\mathbf{R}^3$ при вращении графика функции $f: \Delta \to \mathbf{R}$ вокруг оси абсцисс. Если точка (b, η) лежит над графиком огибающей $C_{a\xi}$, существуют две экстремали $f_{v'}$, $f_{v''}$, $v' < v''$, графики которых проходят через (a, ξ) и (b, η). Та из них, которая имеет более *пологий* график (экстремаль $f_{v''}$), является точкой строгого минимума функционала I.

§ 3. Вторая вариация Достаточные условия экстремума

А. ТОЧКИ ЭКСТРЕМУМА И ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ

17. Высшие вариации функционала. Пусть k — *квадратичная функция* на $\mathbf{R}^n$:

$$k(\xi) = \sum_{i,\, j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j.$$

Эта функция называется *положительной* (*отрицательной*), если $k(\xi) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) при $\xi \in \mathbf{R}^n$. Она называется *положительно* (*отрицательно*)-*определенной*, если $k(\xi) > 0$ (< 0) при $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Если k — положительная (положительно-определенная) функция, то $(-k)$ — отрицательная (отрицательно-определенная) функция. Если k — положительно-определенная функция, то существует такое число $\mu > 0$, что $k(\xi) \geqslant \mu \|\xi\|^2$. Матрица $\{a_{ij}\}_{i,\ j=1, \ldots, n}$, фигурирующая в определении функции k, может без ограничения общности считаться *симметричной*, при этом она однозначно определяется функцией. Если ввести *линейный оператор* A в $\mathbf{R}^n$ так, что $\{a_{ij}\}$ — его *матрица*, то $k(\xi) = (A\xi, \xi)$. *Оператор* A называется *положительным*, *отрицательным*, *положительно-определенным* или *отрицательно-определенным* одновременно с функцией k. Если оператор A обратим, то из его положительности следует его положительная определенность. Симметричность матрицы $\{a_{ij}\}$ соответствует *самосопряженности* оператора A: $(A\xi, \eta) = (\xi, A\eta)$.

Пусть функция $u: D \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ дважды дифференцируема в некоторой точке $\mathbf{a}$, *внутренней точке* множества D, и $d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h})$ — ее *второй дифференциал* в точке $\mathbf{a}$ — квадратичная функция относительно $\mathbf{h}$.

1) *Если* $\mathbf{a}$ — *точка минимума* (*максимума*) *функции* u, *то* $d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h})$ — *положительная* (*отрицательная*) *квадратичная функция.*

2) *Если* $\mathbf{a}$ — *критическая точка функции* u *и* $d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h})$ — *положительно* (*отрицательно*)-*определенная квадратичная функция, то* $\mathbf{a}$ — *точка строгого минимума* (*максимума*) *функции* u.

Утверждения 1) и 2) хорошо известны читателю. Первое представляет собою *необходимое условие экстремума*; оно, в частности, позволяет отличать точки, которые могут быть *точками минимума*, от точек, которые могут быть *точками максимума*. Второе дает *достаточное условие экстремума*. Сформулированные утверждения послужат образцом для построений настоящего параграфа наподобие того, как связь между критическими точками и точками экстремума функции послужила образцом для построений § 1. Для того чтобы получить утверждения типа утверждений 1), 2) для интегрального функционала, необходимо прежде всего обобщить на интегральные функционалы понятие второго дифференциала.

Пусть I — (общий) функционал на нормированном пространстве E. Введем, как и в § 1, функцию

$$\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h}),$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$ — фиксированные векторы из E.

Если функция φ r *раз дифференцируема в точке 0, говорят, что функционал* I r *раз дифференцируем в точке* $\mathbf{a}$ *вдоль вектора* $\mathbf{h}$, *а производную* $\varphi^{(r)}(0)$ *называют* r-*й вариацией функционала* I *в точке* $\mathbf{a}$ *вдоль вектора* $\mathbf{h}$ *и обозначают* $\delta^r I(\mathbf{a}; \mathbf{h})$:

$$\delta^r I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = \frac{d^r}{d\alpha^r} \varphi(\alpha) \Big|_{\alpha=0}.$$

Если функционал I r раз дифференцируем в точке $\mathbf{a}$ вдоль любого вектора $\mathbf{h}$, говорят, что функционал I *имеет r-ю вариацию в точке* $\mathbf{a}$.

r-я вариация обладает следующим очевидным свойством *однородности*:

$$\delta^r I(\mathbf{a};\ \alpha\mathbf{h}) = \alpha^r \delta^r I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}), \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Пусть $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ — функция, r раз дифференцируемая в точке $\mathbf{a}$, тогда u имеет r-ю вариацию в точке $\mathbf{a}$, причем

$$\delta^r u(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = d^r u(\mathbf{a};\ \mathbf{h}).$$

Пусть функционал I имеет r-ю вариацию в точке $\mathbf{a}$, тогда функция $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a}+\alpha\mathbf{h})$ r раз дифференцируема в точке $\mathbf{a}$, и поэтому для нее имеет место *формула Тейлора*

$$\varphi(\alpha) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\, \alpha^k + \varphi_r(\alpha),$$

погрешность φ_r которой обладает следующим свойством:

$$\alpha^{-r}\varphi_r(\alpha) \to 0 \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$

Переписывая формулу Тейлора для функции φ в терминах функционала I, получим *формулу Тейлора для функционала* I

$$I(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = I(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \delta^k I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) + I_r(\mathbf{a};\ \mathbf{h}). \tag{1}$$

Погрешность I_r этой формулы — функционал от $\mathbf{h}$, который при фиксированном *направлении* вектора $\mathbf{h}$, т. е. фиксированном единичном векторе $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h}\,\|\mathbf{h}\|^{-1}$, $\mathbf{h} \neq 0$, рассматриваемый как функция от $\|\mathbf{h}\|$, удовлетворяет соотношению

$$\|\mathbf{h}\|^{-r} I_r(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) \to 0 \quad \text{при} \quad \|\mathbf{h}\| \to 0. \tag{2}$$

Поясним переход от формулы Тейлора для функции φ к формуле Тейлора для функционала I. Если $\mathbf{h} = 0$, формула очевидна. Пусть $\mathbf{h} \neq 0$. Положим $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a}+\alpha\hat{\mathbf{h}})$, тогда

$$I(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = I(\mathbf{a}+\|\mathbf{h}\|\,\hat{\mathbf{h}}) = \varphi(\|\mathbf{h}\|) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\, \|\mathbf{h}\|^k + \varphi_r(\|\mathbf{h}\|) =$$

$$= I(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \delta^k I(\mathbf{a};\ \hat{\mathbf{h}})\, \|\mathbf{h}\|^k + \varphi_r(\|\mathbf{h}\|) =$$

$$= I(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \delta^k I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) + \varphi_r(\|\mathbf{h}\|).$$

Формула Тейлора для функционала I обладает одной *слабостью* по сравнению с формулой Тейлора для дифференцируемой функции u: погрешность $u_r(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ формулы для дифференцируемой функции удовлетворяет соотношению (2) *равномерно* относительно направления вектора $\mathbf{h}$. Соотношение, характеризующее погрешность, может быть записано для функции u иначе:

$$\|\mathbf{h}\|^{-r} u_r(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) \to 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \to 0. \tag{2'}$$

Указанная слабость формулы Тейлора при нашем определении дифференцируемости функционала, вообще говоря, не устранима, что, конечно, известно читателю на примере функций $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$. Определение дифференцируемости, которое приводит к формуле Тейлора с погрешностью, удовлетворяющей соотношению (2) равномерно относительно $\hat{\mathbf{h}}$, будет введено в гл. II, § 1.

18. Высшие вариации интегрального функционала. Обратимся к интегральному функционалу на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$:

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\,dt.$$

Теорема. *Пусть $I \in \Omega^r(\Delta \to \mathbf{R}^n)$; тогда функционал I имеет r-ю вариацию в любой точке, при этом*

$$\delta^r I(\mathbf{f}; \mathbf{h}) = \int_\Delta d^r L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); 0, \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))\,dt.$$

Здесь $d^r L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; dt, d\mathbf{x}, d\mathbf{v})$ — дифференциал функции L в точке $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$.

Второй дифференциал функции L имеет вид

$$d^2L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; 0, d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) =$$
$$= \sum_{i,\,j=1}^n [L_{x_i x_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\,dx_i\,dx_j + 2L_{x_i v_j}(\ldots)\,dx_i\,dv_j + L_{v_i v_j}(\ldots)\,dv_i\,dv_j] =$$
$$= (\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{x}\,d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) + (\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{x}\,d\mathbf{x}, d\mathbf{v}) + (\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{v}\,d\mathbf{v}, d\mathbf{x}) + (\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{v}\,d\mathbf{v}, d\mathbf{v}).$$

Отметим, что операторы $\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{x}$, $\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{v}$ (по поводу определения см. п. 8) — *самосопряженные операторы в* $\mathbf{R}^n$:

$$(\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{x} \xi, \eta) = (\xi, \nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{x} \eta), \quad (\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{v} \xi, \eta) = (\xi, \nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{v} \eta);$$

операторы $\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{v}$ и $\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{x}$ *взаимно-сопряженные операторы*:

$$(\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{v} \xi, \eta) = (\xi, \nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{x} \eta).$$

Воспользуемся полученными выражениями для d^2L и распишем подробнее формулу для $\delta^2 I$:

$$\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h}) = \int_\Delta d^2L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); 0, \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))\,dt =$$
$$= \int_\Delta \sum_{i,\,j=1}^n [L_{x_i x_j}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\,h_i(t)\,h_j(t) +$$
$$+ 2L_{x_i v_j}(\ldots)\,h_i(t)\,h_j'(t) + L_{v_i v_j}(\ldots)\,h_i'(t)\,h_j'(t)]\,dt =$$
$$= \int_\Delta [(\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{x}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(\;))\,\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) + (\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{x}(\ldots)\,\mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t)) +$$
$$+ (\nabla_\mathbf{x} L_\mathbf{v}(\ldots)\,\mathbf{h}'(t), \mathbf{h}(t)) + (\nabla_\mathbf{v} L_\mathbf{v}(\ldots)\,\mathbf{h}'(t), \mathbf{h}'(t))]\,dt. \qquad (3)$$

Условимся называть интегральные функционалы вида

$$K(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(Q(t)\,\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)) + 2(R(t)\,\mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t)) +$$
$$+ (P(t)\,\mathbf{h}'(t), \mathbf{h}'(t))]\,dt \qquad (4)$$

квадратичными интегральными функционалами.

В этом определении P, Q и R — заданные на интервале Δ отображения, значениями которых являются линейные операторы в $\mathbf{R}^n$. Задание подобных отображений (будем для кратности говорить об отображении P) эквивалентно заданию n^2 функций $p_{ij}: \Delta \to \mathbf{R}$; $\{p_{ij}(t)\}$ — матрица оператора $P(t)$. Отображение P будем называть *непрерывным* или *непрерывно дифференцируемым*, если непрерывны или непрерывно дифференцируемы все функции p_{ij}. Производной P' непрерывно дифференцируемого отображения P

будем называть отображение того же вида, что и P, полагая матрицу оператора $P'(t)$ равной $\{p'_{ij}(t)\}$.

В определении (4) отображения P, Q и R условимся предполагать *непрерывными*. Без ограничения общности можно считать, что значения отображений P и Q, т. е. операторы $P(t)$ и $Q(t)$ — самосопряженные операторы при всех t.

Сравнивая формулу (3) для $\delta^2 I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$ и определение (4) квадратичного интегрального функционала, видим, что функционал $\mathbf{h} \to \delta^2 I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$ от аргумента $\mathbf{h}$, рассматриваемый при фиксированной функции $\mathbf{f}$, является квадратичным интегральным функционалом, причем $P(t) = \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))$, $Q(t) = \nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))$, $R(t) = \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))$. Если $I \in \Omega^2$ и $\mathbf{f} \in C^1$, то отображения P, Q и R непрерывны. Если $I \in \Omega^2_{\mathrm{reg}}$, то матрица $\{p_{ij}(t)\}$ не вырождена, $t \in \Delta$, иными словами, оператор $P(t)$ при всех t обратим. Если $I \in \Omega^3$ и $\mathbf{f} \in C^2$, то P, Q и R непрерывно дифференцируемы.

Доказательство теоремы. Введем функцию

$$\varphi(\alpha) = I(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{h}) = \int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}(t) + \alpha\mathbf{h}(t)),\ \mathbf{f}'(t) + \alpha\mathbf{h}'(t))\,dt.$$

Подынтегральное выражение при фиксированных $\mathbf{f}$ и $\mathbf{h}$ — функция на полосе $\{(t,\ \alpha): t \in \Delta,\ \alpha \in \mathbf{R}\}$, имеющая на этой полосе непрерывную r-ю частную производную по α. Поэтому функция φ r раз непрерывно дифференцируема и

$$\varphi^{(r)}(\alpha) = \int_\Delta \frac{\partial^r}{\partial\alpha^r} L(t,\ \mathbf{f}(t) + \alpha\mathbf{h}(t),\ \mathbf{f}'(t) + \alpha\mathbf{h}'(t))\,dt =$$

$$= \int_\Delta d^r L(t,\ \mathbf{f}(t) + \alpha\mathbf{h}(t),\ \mathbf{f}'(t) + \alpha\mathbf{h}'(t);\ 0,\ \mathbf{h}(t),\ \mathbf{h}'(t))\,dt.$$

Полагая $\alpha = 0$, получаем утверждение теоремы.

19. Вторая вариация и необходимые условия экстремума. Пусть I — функционал на нормированном пространстве E. Пусть I имеет вторую вариацию в некоторой точке $\mathbf{a}$.

Теорема. *Если* $\mathbf{a}$ — *точка минимума (максимума) функционала* I, *то* $\delta^2 I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, *где* $\mathbf{h}$ — *произвольный вектор из* E.

Доказательство. В предположениях теоремы функция $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{a} + \alpha\mathbf{h})$ дважды дифференцируема в нуле, и нуль является точкой минимума (максимума) этой функции, поэтому

$$\varphi''(0) = \delta^2 I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) \geqslant 0\ \ (\leqslant 0).$$

Будем называть квадратичный интегральный функционал K *положительным (отрицательным) на множестве* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, *если* $K(\mathbf{h}) \geqslant 0$ $(\leqslant 0)$ *при всех* $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. *Будем называть функционал* K *положительно (отрицательно)-определенным на* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, *если* $K(\mathbf{h}) > 0$ (< 0) *при всех* $\mathbf{h} \neq 0$, $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Если K — положительный (положительно-определенный) функционал, то функционал $-K$, равный в точке $\mathbf{h}$ $-K(\mathbf{h})$, является отрицательным (отрицательно-определенным). Если неравенства $\geqslant$, $\leqslant$, $>$ и $<$ в предыдущих определениях выполняются не на всех

допустимых элементах множества $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, а лишь на элементах, принадлежащих $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, функционал K называется *положительным, отрицательным, положительно-определенным и отрицательно-определенным на множестве* $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Далее в этом пункте I — интегральный функционал, $I \in \Omega^2$. Функционал I во всякой точке имеет вторую вариацию $\delta^2 I(\mathbf{f}, \mathbf{h})$.

Вторая вариация в точке экстремума в задаче со свободными граничными точками. *В точке минимума (максимума)* $\mathbf{f}$ *функционала* I *на пространстве* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ *вторая вариация* $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ — *положительный (отрицательный) квадратичный функционал на* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Сформулированное утверждение — непосредственное следствие теоремы.

Вторая вариация в точке экстремума в задаче с заданными граничными точками. *В точке минимума (максимума)* $\mathbf{f}$ *функционала* I *на множестве* $C_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ — *положительный (отрицательный) квадратичный функционал на* $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Доказательство. Как выяснено в п. 6, формула $\mathbf{g} = \mathbf{f} + \mathbf{h}$, в которой $\mathbf{f}$ — фиксированная функция из $C_{\xi\eta}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, а $\mathbf{h}$ и $\mathbf{g}$ — функции из $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $C_{\xi\eta}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, устанавливает взаимнооднозначное соответствие между $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $C_{\xi\eta}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Сопоставим, следуя п. 6, функционалу I, ограниченному на $C_{\xi\eta}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, функционал $\mathbf{h} \to I_{\mathbf{f}}(\mathbf{h})$ на множестве $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Функционал $I_{\mathbf{f}}$ имеет вторую вариацию в точке 0, причем

$$\delta^2 I_{\mathbf{f}}(0; \mathbf{h}) = \delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h}).$$

В самом деле, функция $\varphi(\alpha) = I_{\mathbf{f}}(\alpha\mathbf{h}) = I(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{h})$ дважды дифференцируема в нуле и ее производная дается формулой $\varphi''(0) = \delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$. Если $\mathbf{f}$ — точка экстремума функционала I на множестве $C_{\xi\eta}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то 0 — точка одноименного экстремума функционала $I_{\mathbf{f}}$. Ссылка на теорему завершает доказательство.

20. Вторая вариация и достаточные условия экстремума. В п. 19 мы распространили на общие и интегральные функционалы *необходимое условие экстремума*, известное для функций $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ (см. утверждение 1) в начале п. 17). *Достаточное условие* (утверждение 2)) не может быть перенесено на общие и интегральные функционалы столь же непосредственно.

Доказательство достаточного условия использует два существенных момента. Во-первых, из положительной определенности $d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h})$ следует оценка

$$d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h}) \geqslant \mu \|\mathbf{h}\|^2, \qquad \mu > 0.$$

Во-вторых, для дважды дифференцируемой функции u имеет место равномерная оценка погрешности в формуле Тейлора

$$u(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = u(\mathbf{a}) + du(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + \frac{1}{2} d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h}) + u_2(\mathbf{a}; \mathbf{h}).$$

Покажем, как оба эти момента используются при доказательстве достаточного условия. Из равномерности оценки погрешности вытекает, что для

произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность нуля U, что $\|\mathbf{h}\|^{-2}|u_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h})| < \varepsilon$ при $\mathbf{h} \in U$. Если $\mathbf{a}$ — критическая точка функции u и $d^2u(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) > 0$, $\mathbf{h} \neq 0$, то

$$u(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - u(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} d^2u(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) + u_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) \geqslant \frac{\mu}{2}\|\mathbf{h}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{h}\|^2$$

при $\mathbf{h} \in U$. Выбирая ε так, что $\varepsilon_1 = \mu/2 - \varepsilon > 0$, получим $u(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - u(\mathbf{a}) \geqslant \varepsilon_1\|\mathbf{h}\|^2$, $\mathbf{h} \in U$, откуда следует, что $\mathbf{a}$ — точка строгого минимума функции u. Если в критической точке $\mathbf{a}$ $d^2u(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ — отрицательно-определенная функция, то $-d^2u(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) \geqslant \mu\|\mathbf{h}\|^2$. Естественные изменения в доказательстве покажут в этом случае, что $\mathbf{a}$ — точка строгого максимума.

Хотя равномерная оценка погрешности не вытекает из того определения вариации, которое было введено выше, при определенных оговорках она имеет место для интегрального функционала (см. п. 32). Ни при каком $\mu > 0$, однако, для квадратичного интегрального функционала не может выполняться оценка $K(\mathbf{h}) \geqslant \mu\|\mathbf{h}\|^2_C$, (см. п. 21).

Пусть K — квадратичный интегральный функционал

$$K(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(Q\mathbf{h},\ \mathbf{h}) + 2(R\mathbf{h},\ \mathbf{h}') + (P\mathbf{h}',\ \mathbf{h}')]\,dt;$$

здесь ради кратности введены естественные сокращения в обозначениях. Ниже в этом пункте предполагается, что отображения P и R непрерывно дифференцируемы, а оператор $P(t)$ обратим при всех t, $t \in \Delta$.

Оценка положительно-определенного квадратичного интегрального функционала на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. *Если K — положительно-определенный квадратичный интегральный функционал на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то существует такое число $\mu > 0$, что*

$$K(\mathbf{h}) \geqslant \mu \int_\Delta \left[\|\mathbf{h}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}\right] dt \qquad (5)$$

при всех $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Из этой оценки вытекает

Достаточное условие экстремума в задаче со свободными граничными точками. *Пусть $I \in \Omega^3_{\text{reg}}$, $\mathbf{f}$ — стационарная точка функционала I и $\delta^2 I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$ — положительно (отрицательно)-определенный квадратичный функционал. Тогда $\mathbf{f}$ — точка строгого минимума (максимума) функционала I на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.*

Доказательство достаточного условия. Достаточно провести доказательство для первого случая, случая минимума. Функция L, которая определяет функционал I, трижды непрерывно дифференцируема. Поэтому для нее справедлива формула Тейлора

$$L(t,\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) = L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) + dL(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ 0,\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v}) + \frac{1}{2} d^2L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ 0,\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v}) + L_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v}),$$

погрешность которой допускает представление

$$L_2(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v}) = \frac{1}{3!}\sum\nolimits_{i,\ j,\ k=1}^{3} [L_{x_ix_jx_k}(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}})\,\Delta x_i\,\Delta x_j\,\Delta x_k + 3L_{x_ix_jv_k}(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}})\,\Delta x_i\,\Delta x_j\,\Delta v_k + 3L_{x_iv_jv_k}(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}})\,\Delta x_i\,\Delta v_j\,\Delta v_k + L_{v_iv_jv_k}(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}})\,\Delta v_i\,\Delta v_j\,\Delta v_k].$$

Точки $(\tilde{x}, \tilde{v})$ лежат на прямолинейном отрезке, соединяющем $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})$. Для краткости мы не отметили в обозначениях, что в каждом слагаемом точки $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$, вообще говоря, различны. Пусть D_N — множество, введенное в п. 5 при доказательстве теоремы 1. Положим

$$a_N = \frac{1}{3!}\Big[\sup_{1\leqslant i,\, j,\, k\leqslant n,\, (t,\, \tilde{\mathbf{x}},\, \tilde{\mathbf{v}})\in D_N} |L_{x_i x_j x_k}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})| + 3\sup |L_{x_i x_j v_k}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})| + 3\sup |L_{x_i v_j v_k}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})| + \sup |L_{v_i v_j v_k}(t, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}})|\Big].$$

Если $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ и $(t, \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v})\in D_N$, то

$$|L_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}; \Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{v})| \leqslant a_N [\|\Delta\mathbf{x}\|^3 + \|\Delta\mathbf{x}\|^2\|\Delta\mathbf{v}\| + \|\Delta\mathbf{x}\|\|\Delta\mathbf{v}\|^2 + \|\Delta\mathbf{v}\|^3] = a_N (\|\Delta\mathbf{x}\| + \|\Delta\mathbf{v}\|)(\|\Delta\mathbf{x}\|^2 + \|\Delta\mathbf{v}\|^2).$$

Оценим погрешность в формуле Тейлора для функционала I

$$I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) = I(\mathbf{f}) + \delta I(\mathbf{f}; \mathbf{h}) + \frac{1}{2}\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h}) + I_2(\mathbf{f}; \mathbf{h}).$$

Имеем

$$I_2(\mathbf{f}; \mathbf{h}) = \int_\Delta L_2(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))\,dt.$$

Если $\|\mathbf{f}\|_{C^1}\leqslant N$ и $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\|_{C^1}\leqslant N$, то

$$\|\mathbf{f}(t)\|_{\mathbf{R}^n},\quad \|\mathbf{f}(t)+\mathbf{h}(t)\|_{\mathbf{R}^n},\quad \|\mathbf{f}'(t)\|_{\mathbf{R}^n},\quad \|\mathbf{f}'(t)+\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{R}^n}\leqslant N.$$

Поэтому при $\|\mathbf{f}\|_{C^1}\leqslant N$, $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\|_{C^1}\leqslant N$ справедлива оценка

$$|I_2(\mathbf{f}; \mathbf{h})| \leqslant \int_\Delta |L_2(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))|\,dt \leqslant a_N \int_\Delta (\|\mathbf{h}(t)\|_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{R}^n})(\|\mathbf{h}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n})\,dt \leqslant a_N \|\mathbf{h}\|_{C^1}\int_\Delta \left[\|\mathbf{h}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}\right] dt.$$

Учтем теперь, что при $I\in\Omega^3_{\mathrm{reg}}$ положительно-определенный функционал $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ удовлетворяет оценке (5):

$$\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h}) \geqslant \mu\int_\Delta [\|\mathbf{h}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}]\,dt,\quad \mu>0.$$

Если $\mathbf{f}$ — стационарная точка функционала I, то

$$I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - I(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h}) + I_2(\mathbf{f}; \mathbf{h}) \geqslant [\mu/2 - a_N\|\mathbf{h}\|_{C^1}]\int_\Delta [\|\mathbf{h}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}]\,dt.$$

Здесь предположено, что $\|\mathbf{f}\|_{C^1}\leqslant N$, $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\|_{C^1}\leqslant N$. Введем число N так, что удовлетворяется неравенство $2\|\mathbf{f}\|_{C^1}<N$. Если $\mathbf{h}$ принадлежит $N/2$-окрестности нуля, то $\|\mathbf{f}\|_{C^1}<N$ и $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\|_{C^1}<N$, так что полученная выше оценка разности $I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - I(\mathbf{f})$ выполняется.

Пусть, наконец, $0<\varepsilon<\mu/2$ и U — такая окрестность нуля, что для $\mathbf{h}\in U$

$$\|\mathbf{h}\|_{C^1}<\min(N/2,\ a_N^{-1}(\mu/2-\varepsilon)).$$

Тогда

$$I(\mathbf{f}+\mathbf{h})-I(\mathbf{f})\geqslant\varepsilon\int_\Delta\left[\|\mathbf{h}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}+\|\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}\right]dt.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{f}$ — точка строгого минимума функционала I.

Оценка положительно-определенного квадратичного интегрального функционала на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. *Если K — положительно-определенный функционал на пространстве $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, то существует такое число $\mu>0$, что выполняется оценка* (5) *при всех* $\mathbf{h}\in C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Из этой оценки вытекает

Достаточное условие экстремума в задаче с заданными граничными точками (предварительный вид). *Пусть $I\in\Omega_{\text{reg}}$ и функция* $\mathbf{f}$, *принадлежащая множеству $C^1_{\xi\eta}(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, удовлетворяет условиям $\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})=0$ при $\mathbf{h}\in C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, $\delta^2 I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$ — положительно (отрицательно)-определенный функционал на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Тогда $\mathbf{f}$ — точка строгого минимума (максимума) функционала I на $C^1_{\xi\eta}(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.*

Чтобы доказать последнее утверждение, следует обычным образом перейти от функционала I на $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ к функционалу $I_\mathbf{f}$ на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и повторить применительно к $I_\mathbf{f}$, считая $\mathbf{h}\in C_0^1$, построения, изложенные при доказательстве достаточного условия в задаче со свободными граничными точками. Читатель, конечно, сможет сделать это самостоятельно.

Итак, необходимым условиям экстремума и достаточным условиям экстремума в обеих экстремальных задачах для интегральных функционалов придан такой же вид, как и условиям экстремума для функций на $\mathbf{R}^k$. Правда, при этом остался пробел: оценка (5) для положительно-определенного квадратичного функционала пока не доказана. Изучению квадратичных интегральных функционалов и доказательству оценки (5) посвящена часть следующего раздела и часть § 2 гл. III (см. пп. 25 и 62).

Методы, которые будут использованы в пп. 25 и 62, существенно различны. В п. 25 и в разделе Б вообще будет изучаться квадратичный функционал K на множестве $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. В соответствии с этим оценка (5) будет доказана в п. 25 для положительно-определенных функционалов на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Метод будет существенно опираться на специфику интегральных функционалов и их связь с дифференциальными уравнениями. Помимо доказательства оценки (5) одновременно будет дан ответ на вопрос, как узнать, является функционал K положительным или положительно-определенным. Это позволит придать условиям экстремума в задаче с заданными граничными точками более эффективный вид.

Построения гл. III в меньшей мере зависят от специфики интегральных функционалов и позволят получить оценку (5) и для множества $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и для множества $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

21. Условие Лежандра. Для всякого линейного оператора A в $\mathbf{R}^n$ справедлива оценка

$$\| A\xi \| \leqslant \| A \| \| \xi \|, \quad \| A \| = (\textstyle\sum_{ij} a_{ij}^2)^{1/2}.$$

$\{a_{ij}\}$ — матрица оператора A. Докажем оценку:

$$\| A\xi \|^2 = \textstyle\sum_i (\sum_j a_{ij} \xi_j)^2 \leqslant \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \sum_k \xi_k^2 = \| A \| \| \xi \|^2.$$

Из оценки следует $\quad |(A\xi, \xi)| \leqslant \| A\xi \| \| \xi \| \leqslant \| A \| \| \xi \|^2.$

Если P — отображение $\Delta \to \{$множество линейных операторов в $\mathbf{R}^n\}$, то

$$|(P(t)\xi, \xi)| \leqslant \| P \| \| \xi \|^2, \text{ где } \| P \| = \sup_t \| P(t) \|.$$

Пусть

$$K(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(Q\mathbf{h}, \mathbf{h}) + 2(R\mathbf{h}, \mathbf{h}') + (P\mathbf{h}', \mathbf{h}')]\, dt$$

— квадратичный интегральный функционал. Выберем и зафиксируем некоторую гладкую функцию $\theta: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, отличную от нуля лишь на интервале $(-1, +1)$, но не равную тождественному нулю. Если τ — фиксированная точка интервала (a, b), то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция $t \to \theta\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)$ равна нулю вне (a, b). Поэтому вектор-функция

$$\mathbf{h}(t) = \varepsilon\theta\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)\xi, \tag{6}$$

где ξ — фиксированный вектор из $\mathbf{R}^n$, может рассматриваться как элемент $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Вычислим $K(\mathbf{h})$:

$$K(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(Q(t)\xi, \xi)\varepsilon^2\theta^2(s) + 2\varepsilon(R(t)\xi, \xi)\theta(s)\theta'(s) +$$
$$+ (P(t)\xi, \xi)\theta'^2(s)]\, dt = K_Q(\mathbf{h}) + K_R(\mathbf{h}) + K_P(\mathbf{h}),$$

где положено $s = \varepsilon^{-1}(t-\tau)$. Оценим введенные здесь слагаемые:

$$|K_Q(\mathbf{h})| \leqslant \varepsilon^2 \sup_t |(Q(t)\xi, \xi)| \int_\Delta \theta^2(s)\, dt \leqslant \varepsilon^3 \| Q \| \| \xi \|^2 \int_\mathbf{R} \theta^2(s)\, ds,$$
$$|K_R(\mathbf{h})| \leqslant 2\varepsilon^2 \| R \| \| \xi \|^2 \int_\mathbf{R} |\theta(s)\theta'(s)|\, ds,$$
$$|K_P(\mathbf{h})| \leqslant \varepsilon \| P \| \| \xi \|^2 \int_\mathbf{R} |\theta'^2(s)|\, ds.$$

Интегралы $\int_\Delta \theta^2(s)\, dt$, $\int_\Delta |\theta(s)\theta'(s)|\, dt$ и $\int_\Delta \theta'^2(s)\, dt$ заменены на интегралы по всей оси, так как функция $\theta(s)$ равна нулю вне интервала Δ. Объединим оценки:

$$|K(\mathbf{h})| \leqslant \varepsilon(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(\| P \| + \| Q \| + \| R \|)\| \xi \|^2 a,$$
$$a = \int_R [\theta^2(s) + 2|\theta(s)\theta'(s)| + \theta'^2(s)]\, ds.$$

Легко найти норму функции $\mathbf{h}$ вида (6):

$$\|h\|_{C^1}=\sup_t \|\mathbf{h}(t)\|_{\mathbf{R}^n}+\sup_t \|\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{R}^n} = \varepsilon \sup_s |\theta(s)| \, \|\xi\| + \sup_s |\theta'(s)| \, \|\xi\|.$$

Отсюда

$$\sup_s |\theta'(s)| \, \|\xi\| \leqslant \|\mathbf{h}\|_{C^1}.$$

Объединим оценки для $K(\mathbf{h})$ и $\|\mathbf{h}\|$:

$$|K(\mathbf{h})| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2)(\|P\|+\|Q\|+\|R\|)\, b\, \|\mathbf{h}\|^2_{C^1},$$

здесь $b=a(\sup_s |\theta'(s)|)^{-2}$.

Лемма 1. *Не существует такого числа* $\mu>0$, *что при всех* $\mathbf{h}\in C^1_0(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ *выполняется оценка* $|K(\mathbf{h})|\geqslant\mu\|\mathbf{h}\|^2_{C^1}$, *а следовательно, и оценка* $K(\mathbf{h})\geqslant\mu\|\mathbf{h}\|^2_{C^1}$.

Доказательство. Допустим, что число $\mu>0$, о котором говорится в лемме, существует, тогда на элементах вида (6)

$$\mu\|\mathbf{h}\|^2_{C^1}\leqslant |K(\mathbf{h})| \leqslant \varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2)(\|P\|+\|Q\|+\|R\|)\, b\, \|\mathbf{h}\|^2_{C^1}.$$

Сравним крайние члены этого неравенства:

$$\mu\leqslant \varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2)(\|P\|+\|Q\|+\|R\|)\, b.$$

Ввиду произвольности ε подобное соотношение невозможно. Лемма доказана.

Вернемся к вычислению $K(\mathbf{h})$ и применим к интегралу $K_P(\mathbf{h})$ теорему о среднем

$$K_P(\mathbf{h})=(P(\tilde{t})\xi, \xi)\int_\Delta \theta'^2(s)\,dt=\varepsilon(P(\tilde{t})\xi, \xi)\int_{\mathbf{R}}\theta'^2(s)\,ds,$$

через $\tilde{t}$ обозначена некоторая точка из интервала $(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$. Так как

$$|K_Q(\mathbf{h})|+|K_R(\mathbf{h})|\leqslant\varepsilon^2(1+\varepsilon)(\|Q\|+\|R\|)\|\xi\|^2 c,$$
$$c=\int_{\mathbf{R}}(\theta^2(s)+2|\theta(s)\theta'(s)|)\,ds,$$

то

$$K(\mathbf{h})=\varepsilon(P(\tilde{t})\xi, \xi)\int_{\mathbf{R}}\theta'^2(s)\,ds+K_1(\mathbf{h}),$$

где

$$|K_1(\mathbf{h})|\leqslant\varepsilon^2(1+\varepsilon)(\|Q\|+\|R\|)\|\xi\|^2 c.$$

При достаточно малых ε ввиду непрерывности P знак числа $K(\mathbf{h})$ совпадает со знаком числа $(P(\tau)\xi, \xi)$.

В силу свойства однородности $K(\alpha\mathbf{h})=\alpha^2K(\mathbf{h})$, $\alpha\in\mathbf{R}$, значения функционала заполняют всю полуось $(-\infty, 0]$, если они содержат хотя бы одно отрицательное число, и всю полуось $[0, \infty)$, если они содержат хотя бы одно положительное число.

Лемма 2. *Если интервал* Δ *содержит такую точку* t, *что для некоторого* $\xi\in\mathbf{R}^n$ $(P(t)\xi, \xi)>0$ (<0), *то значения функционала* K *на пространстве* $C^1_0(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ *содержат всю полуось* $[0, \infty)$ $((-\infty, 0])$. *Если функционал* K *положителен на* $C^1_0(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *то оператор* $P(t)$ *положителен при всех* $t\in\Delta$.

Первое утверждение леммы доказано выше в предположении $t \in (a, b)$. Если $(P(t)\xi, \xi) > 0$ при $t = a$ или $t = b$, то в силу непрерывности P найдется такое $t \in (a, b)$, что $(P(t)\xi, \xi) > 0$. Если функционал K положителен, то неравенство $(P(t)\xi, \xi) < 0$ невозможно ни при каких $t \in \Delta$ и $\xi \in \mathbf{R}^n$, поэтому $(P(t)\xi, \xi) \geqslant 0$, т. е. оператор $P(t)$ положителен.

Условие Лежандра. 1) *Пусть* $I \in \Omega^2$. *В экстремальных задачах обоих типов в точке минимума* (*максимума*) $\mathbf{f}$ *оператор* $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$ *положителен* (*отрицателен*) *при всех* $t \in \Delta$.

2) *Пусть* $I \in \Omega^2_{\text{reg}}$. *В экстремальных задачах обоих типов в точке минимума* (*максимума*) $\mathbf{f}$ *оператор* $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$ *положительно* (*отрицательно*) *определен при всех* $t \in \Delta$.

Действительно, в точке минимума вторая вариация $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ — положительный функционал на $C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ в обоих типах экстремальных задач. После этого замечания условие Лежандра вытекает из леммы 2.

22. **Евклидовы пространства.** Оценка (5) может рассматриваться как указание на то, что при изучении квадратичных интегральных функционалов на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ вместо стандартной нормы целесообразно в качестве нормы функции $\mathbf{f}$ брать число

$$\left(\int_\Delta [\|\mathbf{f}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{f}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}]\,dt\right)^{1/2}.$$

Такой выбор нормы на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ отвечает по существу заданию на нем более детальной структуры, чем структура нормированного пространства, а именно структуры *евклидова пространства.*

Векторное пространство E, *упорядоченной паре* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *элементов которого сопоставлено вещественное число* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *называется евклидовым пространством, если выполняются условия*:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (*симметричность*);

2) $(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \alpha_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ (*билинейность*);

3) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$ (*положительность*);

4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *равносильно* $\mathbf{x} = 0$ (*невырожденность*).

Число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *называется скалярным произведением векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$, *а условия* 1) — 4) — *аксиомами скалярного произведения.*

Всякое евклидово пространство становится *нормированным*, если положить

$$\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}.$$

Из аксиом нормы в проверке нуждается лишь неравенство треугольника. Предварительно докажем *неравенство Коши*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Пусть $\mathbf{x} \neq 0$ и $\alpha \in \mathbf{R}$. Тогда $(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}, \alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) \geqslant 0$, что с помощью аксиом 1) — 2) может быть переписано следующим образом: $\alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geqslant 0$. Ввиду произвольности α должно выполняться неравенство $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant 0$, равносильное

неравенству Коши. Обратимся к неравенству треугольника:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y})=(\mathbf{x},\ \mathbf{x})+2(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+(\mathbf{y},\ \mathbf{y})\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2=(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|)^2.$$

Неравенство треугольника доказано.

Простейшим примером евклидова пространства является пространство $\mathbf{R}^n$ со *стандартным скалярным произведением*. В дальнейших построениях будут фигурировать два *функциональных евклидовых пространства*: $H(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и $H^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Пространство $H(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ состоит из непрерывных функций $\mathbf{f}:\Delta\to\mathbf{R}^n$. Скалярное произведение определяется формулой

$$(\mathbf{f},\ \mathbf{g})_H=\int_\Delta(\mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t))_{\mathbf{R}^n}\,dt.$$

Аксиомы скалярного произведения выполняются очевидным образом. Норма имеет вид

$$\|\mathbf{f}\|_H=\left(\int_\Delta\|\mathbf{f}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}\,dt\right)^{1/2}.$$

Непрерывная функция $\mathbf{f}:\Delta\to\mathbf{R}^n$ может рассматриваться и как элемент пространства $C(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и как элемент пространства $H(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, при этом

$$\|\mathbf{f}\|_H\leqslant|\Delta|^{1/2}\|\mathbf{f}\|_C,\quad|\Delta|=b-a.$$

В самом деле,

$$\|\mathbf{f}\|^2_H=\int_\Delta\|\mathbf{f}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}\,dt\leqslant\sup_t\|\mathbf{f}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}|\Delta|=|\Delta|\,\|\mathbf{f}\|^2_C.$$

Пространство H^1 состоит из непрерывно дифференцируемых функций $\mathbf{f}:\Delta\to\mathbf{R}^n$. Скалярное произведение и норма имеют вид

$$(\mathbf{f},\ \mathbf{g})_{H^1}=\int_\Delta[(\mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t))_{\mathbf{R}^n}+(\mathbf{f}'(t),\ \mathbf{g}'(t))_{\mathbf{R}^n}]\,dt,$$
$$\|\mathbf{f}\|_{H^1}=\left(\int_\Delta[\|\mathbf{f}(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}+\|\mathbf{f}'(t)\|^2_{\mathbf{R}^n}]\,dt\right)^{1/2}.$$

Нормы в пространствах $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и $H^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ связаны неравенством

$$\|\mathbf{f}\|_{H^1}\leqslant|\Delta|^{1/2}\|\mathbf{f}\|_{C^1}.$$

Так как $\|\mathbf{f}\|^2_{H^1}$ — квадратичный интегральный функционал, то из леммы 1 п. 21 следует, что оценка $\mu\|\mathbf{f}\|_{C^1}\leqslant\|\mathbf{f}\|_{H^1}$ невозможна ни при каком $\mu>0$.

Подпространство пространства $H^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, состоящее из элементов множества $C^1_0(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, обозначим $H^1_0(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Оно само является евклидовым пространством.

23. Уравнение Штурма — Лиувилля. Пусть K — квадратичный функционал на $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Вычислим выражение $K(\mathbf{g}+\mathbf{h})$:

$$K(\mathbf{g}+\mathbf{h})=\int_\Delta[(Q(\mathbf{g}+\mathbf{h}),\ \mathbf{g}+\mathbf{h})+2(R(\mathbf{g}+\mathbf{h}),\ \mathbf{g}'+\mathbf{h}')+$$
$$+(P(\mathbf{g}'+\mathbf{h}'),\ \mathbf{g}'+\mathbf{h}')]\,dt=K(\mathbf{g})+2B(\mathbf{g},\ \mathbf{h})+K(\mathbf{h});\qquad(1)$$

здесь положено

$$2B(\mathbf{g},\ \mathbf{h}) = \int_\Delta [(Q\mathbf{g},\ \mathbf{h}) + (Q\mathbf{h},\ \mathbf{g}) + 2(R\mathbf{g},\ \mathbf{h}') + \\ + 2(R\mathbf{h},\ \mathbf{g}') + (P\mathbf{g}',\ \mathbf{h}') + (P\mathbf{h}',\ \mathbf{g}')]\,dt. \qquad (8)$$

Учтем самосопряженность операторов $Q(t)$ и $P(t)$:

$$B(\mathbf{g},\ \mathbf{h}) = \int_\Delta [(Q\mathbf{g} + R^*\mathbf{g}',\ \mathbf{h}) + (R\mathbf{g} + P\mathbf{g}',\ \mathbf{h}')]\,dt. \qquad (8')$$

В этой формуле R^* — отображение, значение которого в точке t равно оператору $R^*(t)$, сопряженному к оператору $R(t)$:

$$(R(t)\,\xi,\ \eta) = (\xi,\ R^*(t)\,\eta).$$

Число $B(\mathbf{g},\ \mathbf{h})$ можно рассматривать как значение некоторого отображения B, заданного на упорядоченных парах $(\mathbf{g},\ \mathbf{h})$ функций $\mathbf{g},\ \mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Это отображение будет называться *билинейным интегральным функционалом* на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Термин «билинейный» означает, что функционалы $\mathbf{h} \to B(\mathbf{g},\ \mathbf{h})$ и $\mathbf{g} \to B(\mathbf{g},\ \mathbf{h})$ (аргументом первого считается $\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$ фиксировано; аргументом второго считается $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ фиксировано) являются, очевидно, линейными (интегральными) функционалами. Функционал B обладает также свойством *симметричности*:

$$B(\mathbf{g},\ \mathbf{h}) = B(\mathbf{h},\ \mathbf{g}),$$

которое немедленно следует из представления (8). Из соотношения (7) заключаем, что функционал K имеет во всякой точке вариацию любого порядка, при этом $\delta K(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = 2B(\mathbf{f},\ \mathbf{h})$, $\delta^2 K(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = 2K(\mathbf{h})$, $\delta^r K = 0$ при $r > 2$. Из формулы (8′) следует также, что

$$K(\mathbf{h}) = B(\mathbf{h},\ \mathbf{h}).$$

Как и всякий интегральный функционал, линейный и квадратичный функционалы непрерывны на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Покажем, что линейный и квадратичный интегральные функционалы непрерывны также на пространстве $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Ограниченность линейного функционала. *Для каждого линейного интегрального функционала L существует такое число c, что*

$$|L(\mathbf{h})| \leqslant c\,\|\mathbf{h}\|_{H^1}, \quad \mathbf{h} \in H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n).$$

Доказательство. Функционал L дается формулой

$$L(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(\mathbf{g}_0(t),\ \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{h}'(t))]\,dt.$$

Каждое из двух слагаемых справа можно рассмотреть как скалярное произведение в $H(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Применим к этим скалярным произведениям неравенство Коши

$$|L(\mathbf{h})| \leqslant \|\mathbf{g}_0\|_H\,\|\mathbf{h}\|_H + \|\mathbf{g}_1\|_H\,\|\mathbf{h}'\|_H.$$

Правую сторону можно рассматривать как скалярное произведение в $\mathbf{R}^2$. Применим к нему неравенство Коши

$$|L(\mathbf{h})| \leqslant (\|\mathbf{g}_0\|_H^2 + \|\mathbf{g}_1\|_H^2)^{1/2} (\|\mathbf{h}\|_H^2 + \|\mathbf{h}'\|_H^2)^{1/2} = (\|\mathbf{g}_0\|_H^2 + \|\mathbf{g}_1\|_H^2)^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{H^1}.$$

Ограниченность L доказана.

Непрерывность L следует из нее:

$$|L(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - L(\mathbf{f})| = |L(\mathbf{h})| \leqslant c \|\mathbf{h}\|_{H^1}.$$

Ограниченность билинейного функционала. *Для каждого B существует такое число c, что*

$$|B(\mathbf{g}, \mathbf{h})| \leqslant c \|\mathbf{g}\|_{H^1} \|\mathbf{h}\|_{H^1}.$$

Доказательство. С небольшими изменениями можно воспользоваться планом доказательства предыдущего утверждения

$$|\mathbf{B}(\mathbf{g}, \mathbf{h})| \leqslant \int_\Delta [\|Q\| \|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{R}^n} \|\mathbf{h}(t)\|_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{R}\| (\|\mathbf{g}(t)\|_{\mathbf{R}^n} \|\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{R}^n} + \|\mathbf{g}'(t)\|_{\mathbf{R}^n} \|\mathbf{h}(t)\|_{\mathbf{R}^n}) + \|P\| \|\mathbf{g}'(t)\|_{\mathbf{R}^n} \|\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{R}^n}]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \|Q\| \|\mathbf{g}\|_H \|\mathbf{h}\|_H + \|R\| (\|\mathbf{g}\|_H \|\mathbf{h}'\|_H + \|\mathbf{g}'\|_H \|\mathbf{h}^1\|_H) + \|P\| \|\mathbf{g}'\|_H \|\mathbf{h}'\|_H \leqslant \max(\|Q\|, \|R\|, \|P\|) \times$$
$$\times (\|\mathbf{g}\|_H \|\mathbf{h}\|_H + \|\mathbf{g}\|_H \|\mathbf{h}'\|_H + \|\mathbf{g}'\|_H \|\mathbf{h}\|_H + \|\mathbf{g}'\|_H \|\mathbf{h}'\|_H) \leqslant$$
$$\leqslant 2 \max(\|Q\|, \|R\|, \|P\|) \|\mathbf{g}\|_{H^1} \|\mathbf{h}\|_{H^1}.$$

На последнем шаге использовано неравенство

$$ab + ab' + a'b + a'b' \leqslant 2(a^2 + a'^2)^{1/2} (b^2 + b'^2)^{1/2}.$$

Непрерывность функционала K следует из ограниченности B:

$$|K(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - K(\mathbf{f})| = |2B(\mathbf{f}, \mathbf{h}) + K(\mathbf{h})| \leqslant 2|B(\mathbf{f}, \mathbf{h})| + |B(\mathbf{h}, \mathbf{h})| \leqslant$$
$$\leqslant 2c \|\mathbf{f}\|_{H^1} \|\mathbf{h}\|_{H^1} + c \|\mathbf{h}\|_{H^1}^2 \leqslant c(2\|\mathbf{f}\|_{H^1} + \|\mathbf{h}\|_{H^1}) \|\mathbf{h}\|_{H^1}.$$

В дальнейшем в этом разделе будет предполагаться, что отображения P и R непрерывно дифференцируемы.

Если $\mathbf{g} \in C^2$, то во втором слагаемом формулы (8′) можно проинтегрировать по частям:

$$B(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = \int_\Delta ((l\mathbf{g})(t), \mathbf{h}(t))_{\mathbf{R}^n} dt + (P\mathbf{g}' + R\mathbf{g}, \mathbf{h})_{\mathbf{R}^n} \big|_\Delta.$$

Здесь

$$(l\mathbf{g})(t) = -\frac{d}{dt}(P(t)\mathbf{g}'(t) + R(t)\mathbf{g}(t)) + (R^*(t)\mathbf{g}'(t) + Q(t)\mathbf{g}(t)).$$

Символ $l\mathbf{g}$, $l\mathbf{g} \in C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, можно воспринимать как результат действия некоторого линейного дифференциального оператора l на функцию $\mathbf{g} \in C^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Полученное выражение для $B(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ можно записать короче:

$$B(\mathbf{g}, \mathbf{h}) = (l\mathbf{g}, \mathbf{h})_H + (P\mathbf{g}' + R\mathbf{g}, \mathbf{h})_{\mathbf{R}^n} \big|_\Delta. \qquad (9)$$

Это соотношение иногда называют *предварительной формулой Грина*. Если $\mathbf{h} \in C_0^1$, формула (9) принимает вид

$$B(\mathbf{g},\ \mathbf{h}) = (l\mathbf{g},\ \mathbf{h})_H. \qquad (9')$$

Если $\mathbf{g},\ \mathbf{h} \in C^2$, то наряду с (9) имеем

$$B(\mathbf{h},\ \mathbf{g}) = (l\mathbf{h},\ \mathbf{g})_H + (P\mathbf{h}' + R\mathbf{h},\ \mathbf{g})_{\mathbf{R}^n}\big|_\Delta.$$

Вычитая последнюю формулу из (9) и используя симметричность B, получаем

$$(l\mathbf{g},\ \mathbf{h})_H - (\mathbf{g}, l\mathbf{h})_H = \left[(P\mathbf{h}' + R\mathbf{h},\ \mathbf{g})_{\mathbf{R}^n} - (P\mathbf{g}' + R\mathbf{g},\ \mathbf{h})_{\mathbf{R}^n}\right]_\Delta. \qquad (10)$$

Это соотношение иногда называют *формулой Грина*.

Обозначим через $D(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ множество функций $\mathbf{f} \in C^2(\Delta \to \to \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющих условию $\mathbf{f}(a) = 0$, $\mathbf{f}(b) = 0$.

Формула (10) при $\mathbf{g},\ \mathbf{h} \in D$ принимает вид

$$(l\mathbf{g},\ \mathbf{h})_H = (\mathbf{g},\ l\mathbf{h})_H. \qquad (10')$$

Формула (9) может рассматриваться как *проинтегрированная форма первой вариации* для функционала K. Нетрудно убедиться что

$$L[\mathbf{g}] = 2l\mathbf{g},\ \ p[\mathbf{g}] = 2(P\mathbf{g}' + R\mathbf{g}).$$

Уравнение Эйлера для функционала K имеет вид

$$l\mathbf{g} = 0. \qquad (11)$$

Особенностью уравнения (11) является его *линейность*.

При $n = 1$

$$(lg)(t) = -\frac{d}{dt}(p(t)g'(t)) + \tilde{q}(t)g(t),$$

здесь положено $\tilde{q} = q - r'$. Сокращая обозначения, будем также писать

$$lg = -(pg')' + \tilde{q}g.$$

Уравнение Эйлера при $n = 1$ известно читателю под названием *уравнения Штурма — Лиувилля*. Отметим еще, что в случае $n = 1$ можно с помощью интегрирования по частям несколько упростить выражения для B и K:

$$B(g,\ h) = \int_\Delta [qgh + r(gh' + g'h) + pg'h']\,dt = \int_\Delta \Big[qgh +$$
$$+ r\frac{d}{dt}(gh) + pg'h'\Big]\,dt = \int_\Delta (\tilde{q}gh + pg'h')\,dt + rgh\,|_\Delta,$$
$$K(h) = \int_\Delta (\tilde{q}h^2 + ph'^2)\,dt + rh^2\,|_\Delta. \qquad (12)$$

Некоторые свойства решений уравнений Штурма — Лиувилля известны читателю из теории дифференциальных уравнений. Пусть $p(t) \neq 0$ при $t \in \Delta$. Все решения уравнения $lg = 0$ принадлежат классу C^2 и могут быть описаны формулой $g = \alpha\varphi + \beta\psi$, в которой α и β — произвольные числа, а φ и ψ — линейно-неза-

висимые частные решения, удовлетворяющие, например, условиям $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=1$, $\psi(a)=1$, $\psi'(a)=0$. Общий вид решения, удовлетворяющего условию $g(a)=0$, таков:

$$g=\alpha u,$$

где u — какое-нибудь ненулевое частное решение, удовлетворяющее условию $u(a)=0$, а α — произвольное число. Последняя формула показывает, между прочим, что корни ненулевого решения u, удовлетворяющего условию $u(a)=0$, не зависят от конкретного выбора этого решения. Если решение u не обращается в нуль в точке b, то принадлежащее множеству $D(\Delta)$ решение уравнения $lg=0$ единственно: $g=0$. В противоположном случае множество таких решений образует одномерное векторное пространство: $g=\alpha u$. Из единственности решения задачи Коши следует, что никакое ненулевое решение u уравнения Штурма — Лиувилля не обращается в нуль в той же точке, что и его производная u'.

24. Необходимые условия положительности K. План дальнейшего изложения в этом разделе таков. В ближайших пунктах в терминах поведения решений уравнения $lg=0$ получены критерии положительности и положительной определенности функционала K на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. В качестве следствия установлена оценка (5) для положительно-определенного функционала на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и даны новые, более эффективные условия для точек экстремума интегрального функционала в задаче с заданными граничными точками. В заключение эти условия применены к примерам, рассмотренным в § 2. Подробные доказательства критериев положительности и положительной определенности приведены ради краткости лишь при $n=1$, в общем случае мы ограничиваемся формулировками.

При $n=1$, согласно формуле (12),

$$K(h)=\int_\Delta(\tilde{q}h^2+ph'^2)\,dt+rh^2\,|_\Delta\,.$$

Лемма 2 п. 21 утверждает, в частности, что для положительности K необходимо $p(t)\geqslant 0$, $t\in\Delta$. В тех точках, где коэффициент p обращается в нуль, решения уравнения Штурма — Лиувилля приобретают особенности, вид которых зависит от характера аннулирования коэффициента p. Рассматривая ниже функционал K при $n=1$, мы будем считать, что $p(t)\neq 0$ на интервале Δ. В этом случае для положительного функционала K $p(t)>0$, $t\in\Delta$.

Лемма 1. *Если $u\in D(\Delta)$ и $lu=0$, то $K(u)=0$. Если функционал K положителен на $C_0^1(\Delta)$, то множество функций u, на которых он обращается в нуль: $K(u)=0$, совпадает с множеством решений уравнения $lu=0$, принадлежащих $D(\Delta)$.*

Первое утверждение следует из формулы (9′) и равенства $K(h)=B(h,\ h)$. Если функционал K положителен, то функция u, удовлетворяющая соотношению $K(u)=0$, является точкой мини-

мума функционала. Согласно необходимому условию экстремума (см. п. 8), $u \in D(\Delta)$ и удовлетворяет уравнению Эйлера $lu=0$. Лемма доказана.

Условие $p>0$ положительности функционала K носит локальный характер. Нижеследующее условие является более тонким.

Лемма 2. *Если функционал K положителен, то ненулевое решение u уравнения $lu=0$, удовлетворяющее условию $u(a)=0$, не обращается в нуль на интервале (a, b).*

Переходя к доказательству, рассмотрим функцию $t \to \varphi_\lambda(t)$, $t \in \Delta$, определяемую при фиксированном λ, $\lambda \in \mathbf{R}$, уравнением $(l-\lambda)\varphi_\lambda = 0$ и начальными условиями $\varphi_\lambda(a)=0$, $\varphi_\lambda'(a)=1$ (штрих обозначает производную по аргументу t). При $\lambda=0$ функция φ_λ превращается в ненулевое решение задачи $lu=0$, $u(a)=0$. Допустим, что функция u обращается в нуль в точке c, лежащей на интервале (a, b): $u(c)=0$. В этом случае функция φ_λ при достаточно малых λ также обращается в нуль в некоторой точке $r(\lambda)$, лежащей на интервале (a, b), удовлетворяющей условию $r(0)=c$ и непрерывно зависящей от λ.

Корень $r(\lambda)$ определяется уравнением $\varphi_\lambda(r(\lambda))=0$. Если функция $(t, \lambda) \to \varphi_\lambda(t)$ в окрестности точки $(c, 0)$ непрерывно дифференцируема и выполняется соотношение $\varphi_0'(c)=u'(c) \neq 0$, то можно сослаться на теорему о неявной функции и утверждать, что корень существует и обладает указанными свойствами. Соотношение $u'(c) \neq 0$ очевидно, а непрерывная дифференцируемость функции $(t, \lambda) \to \varphi_\lambda(t)$ вытекает из общей теоремы о зависимости решений дифференциального уравнения от параметра (см. Приложение 1).

Фиксируем достаточно малое число λ и рассмотрим на интервале $[a, b]$ функцию

$$g(t) = \begin{cases} \varphi_\lambda(t), & a \leqslant t \leqslant r(\lambda), \\ 0, & r(\lambda) \leqslant t \leqslant b. \end{cases}$$

Функция g непрерывна на $[a, b]$ и непрерывно дифференцируема на интервалах $[a, r(\lambda)]$ и $[r(\lambda), b]$. В точке $r(\lambda)$ производная функции g имеет разрыв первого рода. Производная φ_λ' не может обращаться в нуль в точке $r(\lambda)$, ибо в этой точке равна нулю сама функция φ_λ. Итак, функция g не принадлежит $C^1(\Delta)$, так что функционал K не определен на ней. Однако интеграл

$$\int_\Delta (\tilde{q} h^2 + p h'^2)\, dt,$$

дающий значение функционала на функции из пространства $C^1(\Delta)$, сохраняет смысл, если вместо h подставить в него функцию g. Рассмотрим этот интеграл:

$$\int_\Delta (\tilde{q} g^2 + p g'^2)\, dt = \int_a^{r(\lambda)} (\tilde{q} \varphi_\lambda^2 + p \varphi_\lambda'^2)\, dt =$$
$$= \int_a^{r(\lambda)} [(\tilde{q} - \lambda) \varphi_\lambda^2 + p \varphi_\lambda'^2]\, dt + \lambda \int_a^{r(\lambda)} \varphi_\lambda^2 dt.$$

Интеграл $\int_a^{r(\lambda)}[(\tilde{q}-\lambda)\varphi_\lambda^2+p\varphi_\lambda'^2]\,dt$ имеет вид квадратичного интегрального функционала на $C_0^1(a,\ r(\lambda))$. Так как функция φ_λ удовлетворяет уравнению Эйлера для этого функционала $(l-\lambda)\varphi_\lambda=0$, то в соответствии с леммой 1 интеграл равен нулю. Поэтому справедливо соотношение

$$\int_\Delta (\tilde{q}g^2+pg'^2)\,dt=\lambda\int_a^{r(\lambda)}\varphi_\lambda^2 dt.$$

Отсюда следует, что при отрицательном λ $K(g)<0$. Если бы функция g принадлежала множеству $C_0^1(\Delta)$, такое неравенство противоречило бы положительности функционала K. Это противоречие означало бы, что решение u не может иметь корней на интервале $(a,\ b)$. Выше было отмечено, однако, что функция g не принадлежит множеству $C_0^1(\Delta)$.

Введем более обширное множество $\hat{C}_0^1(\Delta)$, которому принадлежит функция g. Множество $\hat{C}_0^1(\Delta)$ состоит из функций $\Delta\to\mathbf{R}$, непрерывных на Δ и имеющих на Δ *кусочно-непрерывную производную*. Напомним, что функция называется *кусочно-непрерывной* на Δ, если она непрерывна всюду на Δ, кроме конечного числа точек, которые являются для нее *точками разрыва первого рода*. Аналогично можно ввести множество $\hat{C}_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ вектор-функций $\Delta\to\mathbf{R}^n$, каждая координата которых принадлежит $\hat{C}^1(\Delta)$. Вводя на $\hat{C}^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ скалярное произведение той же формулой, что и в пространстве $H^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, получим евклидово пространство $\hat{H}^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Подпространство этого пространства, состоящее из функций, удовлетворяющих условиям $\mathbf{f}(a)=0$, $\mathbf{f}(b)=0$, обозначим $\hat{H}_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Функция g принадлежит $\hat{H}_0^1(\Delta)$.

Множество M метрического пространства E называется плотным множеством, если произвольная окрестность каждой точки пространства E содержит точку из M.

Множество $C_0^1(\Delta)$ — плотное множество в пространстве $\hat{H}_0^1(\Delta)$. Доказательство этого и родственных ему более сильных утверждений приведено в Приложении 2.

Функционал K можно считать заданным обычной формулой на пространстве $\hat{H}^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$. Он непрерывен на этом пространстве; доказательство буквально повторяет доказательство непрерывности K на $H^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Благодаря непрерывности на пространстве $\hat{H}_0^1(\Delta)$ значения функционала K имеют в некоторой окрестности точки g тот же знак, что и число $K(g)$. В этой окрестности содержится элемент f из $C_0^1(\Delta)$ и, следовательно, $K(f)<0$. Лемма 2 доказана.

25. Критерии положительности и положительной определенности.

Теорема 1. *Для того чтобы функционал K на множестве $C_0^1(\Delta)$ был положителен, необходимо и достаточно, чтобы ненулевое решение уравнения $lu=0$, удовлетворяющее условию $u(a)=0$, не имело корней на интервале $(a,\ b)$.*

Доказательство. Необходимость установлена выше. Пусть решение u не имеет корней на интервале (a, b). Покажем, что в этом случае для $h \in C_0^1(\Delta)$ справедливо соотношение

$$K(h) = \int_\Delta p(t)\left[h'(t) - \frac{u'(t)}{u(t)} h(t)\right]^2 dt,$$

откуда следует, что $K(h) \geqslant 0$. Интеграл справа имеет смысл, так как отношение h/u имеет в точках a и b конечный предел.

Докажем объявленную формулу

$$\int_\Delta p\left(h' - \frac{u'}{u} h\right)^2 dt = \int_\Delta \left(ph'^2 - 2p\frac{u'}{u} hh' + p\frac{u'^2}{u^2} h^2\right) dt =$$
$$= \int_\Delta \left[ph'^2 + \left(p\frac{u'}{u}\right)' h^2 + p\frac{u'^2}{u^2} h^2\right] dt = \int_\Delta \left[ph'^2 + \frac{(pu')'}{u} h^2\right] dt =$$
$$= \int_\Delta (ph'^2 + \tilde{q} h^2)\, dt = K(h).$$

Переход от второго к третьему члену в этой цепочке основан на интегрировании по частям в среднем слагаемом, внеинтегральный член равен нулю в силу условий $h(a) = 0$, $h(b) = 0$.

Теорема 2. *Для того чтобы функционал K на множестве $C_0^1(\Delta)$ был положительно определен, необходимо и достаточно, чтобы ненулевое решение уравнения $lu = 0$, удовлетворяющее условию $u(a) = 0$, не имело корней на интервале $(a, b]$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из условия положительности и того факта, что на решении u, имеющем корень в точке b, в соответствии с леммой 1 п. 24 функционал K аннулируется. Докажем достаточность. Пусть решение u не имеет корней на интервале $(a, b]$. Тогда

$$K(h) = \int_\Delta p\left(h' - \frac{u'}{u} h\right)^2 dt.$$

Если $K(h) = 0$, то $h' - \frac{u'}{u} h = 0$. Отсюда следует $h = \alpha u$, где α — произвольная постоянная. Так как $h(b) \neq 0$, это равенство возможно лишь при $\alpha = 0$.

Лемма. *Для того чтобы функционал K на пространстве $C_0^1(\Delta)$ был положительно определен, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\mu > 0$ выполнялось неравенство*

$$K(h) \geqslant \mu \int_\Delta h'^2(t)\, dt. \qquad (13)$$

Доказательство. Из неравенства следует, что при $K(h) = 0$ функция h постоянна. С учетом условий $h(a) = h(b) = 0$ это означает, что $h = 0$. Достаточность установлена. Обратимся к необходимости. Пусть функционал K положительно определен. Тогда ненулевое решение u уравнения $lu = 0$, удовлетворяющее условию $u(a) = 0$, не имеет корней на интервале $(a, b]$. Пусть μ — положительное число, причем $\mu < \min\limits_{t \in \Delta} p(t)$. Рассмотрим решение ψ_μ уравнения $-((p - \mu)\psi_\mu')' + \tilde{q}\psi_\mu = 0$, удовлетворяющее

условиям $\psi_\mu(a)=0$, $\psi'_\mu(a)=1$. Функция $t^{-1}\psi_0(t)$ не имеет корней на интервале $[a, b]$. В силу теоремы о зависимости решений дифференциального уравнения от параметров функция $(t, \mu)\to\psi_\mu(t)$ непрерывна при $t\in\Delta$, $\mu<\min p$. Поэтому при достаточно малых μ функция $t^{-1}\psi_\mu(t)$ также не имеет корней на интервале Δ. Уравнение для функции ψ_μ является уравнением Эйлера для квадратичного функционала

$$K(h)-\mu\int_\Delta h'^2 dt.$$

При достаточно малых μ выполнено установленное выше условие положительной определенности этого функционала. Следовательно, при таких μ

$$K(h)-\mu\int_\Delta h'^2 dt\geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Неравенство (13), очевидно, выполняется, если $\tilde{q}\geqslant 0$. Это означает, между прочим, что при $\tilde{q}\geqslant 0$ ненулевое решение уравнения $lu=0$, удовлетворяющее условию $u(a)=0$, не обращается в нуль на интервале $(a, b]$.

Условимся говорить, что функционал K *равномерно положителен* на пространстве $H_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, если существует число $\mu>0$, такое, что

$$K(h)\geqslant\mu\|\mathbf{h}\|_{H^1}^2,\quad \mathbf{h}\in H_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n).$$

Теорема 3. *Функционал K является положительно-определенным на множестве $C_0^1(\Delta)$ тогда и только тогда, когда K равномерно положителен на пространстве $H_0^1(\Delta)$.*

Из теоремы 3 вытекает оценка (5) для положительно-определенного на $C_0^1(\Delta)$ функционала K.

Доказательство. На множестве $C_0^1(\Delta)$ справедлива оценка

$$\int_\Delta h^2(t)\,dt\leqslant\frac{|\Delta|^2}{2}\int_\Delta h'^2(t)\,dt. \tag{14}$$

Действительно, пользуясь неравенством Коши на $H([a, t])$, имеем

$$h^2(t)=\left(\int_a^t h'(\tau)\,d\tau\right)^2=\left(\int_a^t 1\cdot h'(\tau)\,d\tau\right)^2\leqslant\int_a^t d\tau\int_a^t h'^2(\tau_1)\,d\tau_1\leqslant$$
$$\leqslant(t-a)\int_\Delta h'^2(t)\,dt.$$

Интегрируя это неравенство, получаем (14). Из (14) следует

$$\|h\|_{H_0^1}^2\leqslant\left(1+\frac{|\Delta|^2}{2}\right)\int_\Delta h'^2(t)\,dt.$$

Если функционал K положительно определен, то в силу (13)

$$K(h)\geqslant\nu\|h\|_{H^1}^2,$$

где $\nu=\mu(1+|\Delta|^2/2)^{-1}$. Таким образом, положительно-определенный функционал равномерно положителен. Положительная определенность равномерно-положительного функционала очевидна.

Результаты, полученные выше для функционала K при $n=1$, непосредственно переносятся на случай $n>1$. Доказательства не содержат новых идей, это позволит ограничиться лишь формулировкой новых утверждений.

Если функционал

$$K(\mathbf{h})=\int_\Delta [(Q\mathbf{h},\ \mathbf{h})+2(R\mathbf{h},\ \mathbf{h}')+(P\mathbf{h}',\ \mathbf{h}')]\,dt$$

положителен на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *то при всех* $t\in\Delta$ *положителен оператор* $P(t)$. Чтобы исключить появление особенностей у решений уравнения Эйлера

$$(l\mathbf{g})(t)=-\frac{d}{dt}(P(t)\mathbf{g}'(t)+R(t)\mathbf{g}(t))+(R^*(t)\mathbf{g}'(t)+Q(t)\mathbf{g}(t))=0,$$

будем предполагать, что *при всех* $t\in\Delta$ *оператор* $P(t)$ *обратим*. Для положительного функционала это означает, что оператор $P(t)$, $t\in\Delta$, положительно определен.

Решения уравнения $l\mathbf{u}=0$, удовлетворяющие условию $\mathbf{u}(a)=0$, образуют n-мерное векторное подпространство в $2n$-мерном пространстве всех решений. Обозначим это подпространство $N(a)$. Аналогично вводится подпространство $N(b)$ решений, аннулирующихся в точке b. Подпространство N определяется как пересечение $N(a)$ и $N(b)$, т. е. как множество решений, аннулирующихся в a и b. Размерность N, $\dim N$, может быть заключена между нулем и n. Наконец, введем пространство $N(a,\ t)$, элементами которого являются значения в точке t вектор-функций из $N(a)$. Размерность $N(a,\ t)$ также заключена между нулем и n.

Если функционал K *положителен на* $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *то множество аннулирующих его вектор-функций совпадает с* N. *Для того чтобы функционал* K *был положителен на* $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы при всех* $t\in(a,\ b)$ *выполнялось* $\dim N(a,\ t)=n$. *Для того чтобы функционал* K *был положительно определен на* $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы соотношение* $\dim N(a,\ t)=n$ *выполнялось при* $t\in(a,\ b]$. *Для того чтобы функционал* K *был положительно определен на* $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы он был равномерно положителен на пространстве* $H_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$.

Отсюда вытекает оценка (5) для положительно-определенного на $C_0^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ функционала K.

26. Уравнение Якоби. Сопряженные точки. Пользуясь результатами предыдущего пункта, придадим окончательный вид описанию точек экстремума интегрального функционала I на множестве $C_{\xi\eta}^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ в терминах дифференциальных уравнений. Будем предполагать, что $I\in\Omega_{\mathrm{reg}}^3$. При этих условиях функционал I имеет вторую вариацию $\delta^2 I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$, которая является квадратичным интегральным функционалом

$$\delta^2 I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})=\int_\Delta [(\nabla_{\mathbf{x}}L_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')\mathbf{h},\ \mathbf{h})+2(\nabla_{\mathbf{v}}L_{\mathbf{x}}(\ldots)\mathbf{h},\ \mathbf{h}')+ \\ +(\nabla_{\mathbf{v}}L_{\mathbf{v}}(\ldots)\mathbf{h}',\ \mathbf{h}')]\,dt.$$

Если $\mathbf{f} \in C^2$, то операторы

$$\nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)), \ \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) \ \text{и} \ \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(x), \mathbf{f}'(t))$$

зависят от t непрерывно дифференцируемым образом; кроме того, оператор $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$ при $t \in \Delta$ обратим. Точка экстремума $\mathbf{f}$ функционала I на множестве $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ принадлежит C^2.

Уравнение Эйлера для второй вариации $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ функционала I имеет вид

$$l\mathbf{g} = -\frac{d}{dt}[\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{g}' + \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{x}}(\ldots)\mathbf{g}] + [\nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{v}}(\ldots)\mathbf{g}' + \nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{x}}(\ldots)\mathbf{g}] = 0.$$

Оно называется *уравнением Якоби* для функционала I на функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in C^2$.

Точка t называется сопряженной (по Якоби) точкой к точке a на функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in C^2$, если $\dim N(a, t) < n$, т. е. если уравнение $l\mathbf{u} = 0$ имеет ненулевое решение из $N(a)$, обращающееся в точке t в нуль (по поводу обозначений см. конец п. 25). Сопряженную к a точку часто обозначают a^*. *Для того чтобы вторая вариация $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ была положительным (отрицательным) функционалом на множестве C^1_0, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$ был положительно (отрицательно) определен, а интервал (a, b) не содержал точек, сопряженных к точке a на функции $\mathbf{f}$. Для того чтобы вторая вариация $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$ была положительно (отрицательно) определен функционалом, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$ был положительно (отрицательно) определен, а интервал $(a, b]$ не содержал точек, сопряженных к точке a на функции $\mathbf{f}$.*

Необходимые условия экстремума в задаче с заданными граничными точками. *Для того чтобы функция $\mathbf{f}$ была точкой минимума (максимума) функционала I на множестве $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, необходимо, чтобы $\mathbf{f}$ удовлетворяла следующим условиям:*

1) $\mathbf{f} \in C^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$;

2) $L[\mathbf{f}] = 0$ *(уравнение Эйлера);*

3) $\mathbf{f}(a) = \xi$, $\mathbf{f}(b) = \eta$ *(граничные условия);*

4) *оператор $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$, $t \in \Delta$, — положительно (отрицательно) определен (условие Лежандра);*

5) *интервал (a, b) не содержит точки, сопряженной к точке a на функции $\mathbf{f}$.*

Условия 1), 2), 3) получены в п. 8, условие 4) — в п. 21, условие 5) получено в начале настоящего пункта как необходимое условие положительности (отрицательности) второй вариации $\delta^2 I(\mathbf{f}; \mathbf{h})$. Требование положительности (отрицательности) второй вариации получено в п. 19.

Достаточные условия экстремума в задаче с заданными граничными точками. *Пусть функция $\mathbf{f}$: $\Delta \to \mathbf{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\mathbf{f} \in C^2$;

2) $L[\mathbf{f}] = 0$;

3) $\mathbf{f}(a) = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{f}(b) = \boldsymbol{\eta}$;

4) *оператор* $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$, $t \in \Delta$, *положительно (отрицательно) определен;*

5) *интервал* $(a, b]$ *не содержит точки, сопряженной к точке* a *на функции* $\mathbf{f}$.

Тогда $\mathbf{f}$ *— точка строгого минимума (максимума) функционала* I *на множестве* $C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Доказательство опирается на достаточное условие, полученное в п. 20. Напомним его: если функция $\mathbf{f} \in C^1_{\xi\eta}(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ удовлетворяет условиям: $\delta I(\mathbf{f};\, \mathbf{h}) = 0$ при $\mathbf{h} \in C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $\delta^2 I(\mathbf{f};\, \mathbf{h})$ — положительно (отрицательно)-определенный функционал на $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то $\mathbf{f}$ — точка строгого минимума (максимума) функционала I на $C^1_{\xi\eta}$.

Из предположений 1), 2) и теоремы 3 п. 5 (проинтегрированная форма вариации) следует, что $\delta I(\mathbf{f};\, \mathbf{h}) = 0$ при $\mathbf{h} \in C^1_0$. Предположение 3) означает, что $\mathbf{f} \in C^1_{\xi\eta}$. Наконец, предположения 4) и 5) обеспечивают положительную (отрицательную) определенность $\delta^2 I(\mathbf{f};\, \mathbf{h})$ на $C^1_0(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

27. Уравнение Якоби — уравнение в вариациях. Пусть $F(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(r)})$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \ldots \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Рассмотрим порождаемое ею отображение $C^r(\Delta \to \mathbf{R}^n) \to C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, сопоставляющее функции $\mathbf{f}$ функцию $F(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \ldots, \mathbf{f}^{(r)}(t))$. Уравнение для нулей этого отображения

$$F(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t), \ldots, \mathbf{f}^{(r)}(t)) = 0$$

есть не что иное как *дифференциальное уравнение порядка* r; сами нули отображения — *решения дифференциального уравнения.* Пусть решение $\mathbf{f}$ гладко зависит от параметра α, т. е. задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\mathbf{f}(t, \alpha) \in \mathbf{R}^n$, $(t, \alpha) \in \Delta \times \delta$, причем $\mathbf{f}(t, \alpha)$ как функция от t при каждом α — решение уравнения. Производная $\mathbf{h}(t) = \mathbf{f}_\alpha(t, 0)$ удовлетворяет *линейному дифференциальному уравнению*

$$\sum_{i=1}^{n} \Big[F_{x_i}(t, \mathbf{f}(t), \ldots, \mathbf{f}^{(r)}(t))\, h_i(t) + \\ + \sum_{j=1}^{r} F_{v_i^{(j)}}(t, \mathbf{f}(t), \ldots, \mathbf{f}^{(r)}(t))\, h_i^{(j)}(t)\Big] = 0,$$

где $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, 0)$. По отношению к исходному это линейное уравнение называют *уравнением в вариациях* на решении $\mathbf{f}$. Его значение определяется тем, что функция $\mathbf{f} + \mathbf{h}$, где $\mathbf{f}$ — решение исходного уравнения, а $\mathbf{h}$ — малое решение уравнения в вариациях, близка к некоторому решению исходного уравнения. Оказывается, *уравнение Якоби есть уравнение в вариациях по отношению к уравнению Эйлера.* В самом деле, пусть

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 0$$

— уравнение Эйлера. Составляя уравнение в вариациях, получаем уравнение Якоби

$$\sum_{i=1}^{n} [\nabla_{\mathbf{x}} L_{x_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') h_i + \nabla_{\mathbf{x}} L_{v_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') h_i'] -$$
$$- \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} [\nabla_{\mathbf{v}} L_{x_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') h_i + \nabla_{\mathbf{v}} L_{v_i}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') h_i'] = 0.$$

Вернемся к обсуждению достаточных условий экстремума для интегрального функционала I. Пусть $\mathbf{f} \in C^1_{\xi\eta}$ — экстремаль функционала I. Согласно теореме 5 Приложения 1, на интервале Δ определен *пучок* $M_{a\xi}$ *экстремалей*, графики которых проходят через точку (a, ξ), т. е. определены решения $\tilde{f}(t, \mathbf{v}) \in \mathbf{R}^n$ уравнения Эйлера с начальными условиями $\tilde{\mathbf{f}}(a, \mathbf{v}) = \xi$, $\tilde{\mathbf{f}}_t(a, \mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ и достаточно близко к вектору $\zeta = \mathbf{f}'(a): \|\mathbf{v} - \zeta\| < \varepsilon$. Рассмотрим матрицу Якоби $\{\tilde{f}_{iv_j}(t, \mathbf{v})\}$ отображения $\mathbf{v} \to \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{v})$, в этом отображении t считается фиксированным. Каждый столбец $(\tilde{f}_{iv_j}(t, \mathbf{v}), \ldots, \tilde{f}_{nv_j}(t, \mathbf{v}))$ матрицы Якоби — решение уравнения Якоби на функции $t \to \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{v})$. Множество этих столбцов — базис в пространстве $N_{\mathbf{v}}(a)$ решений уравнения Якоби, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}(a) = 0$. Это видно из начальных условий

$$\{\tilde{f}_{iv_j}(a, \mathbf{v})\} = \left\{\frac{\partial \xi_i}{\partial v_j}\right\} = 0, \quad \{(\tilde{f}_{iv_j})_t(a, \mathbf{v})\} = \left\{\frac{\partial v_i}{\partial v_j}\right\} = \{\delta_{ij}\}.$$

Следовательно, линейная оболочка столбцов матрицы Якоби совпадает с пространством $N_{\mathbf{v}}(a, t)$, элементами которого являются значения в точке t решений из $N_{\mathbf{v}}(a)$. Сопряженные к a точки a^* характеризуются тем, что $\dim N_{\mathbf{v}}(a, a^*) < n$. Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда якобиан равен нулю:

$$\det\{\tilde{f}_{iv_j}(a^*, \mathbf{v})\} = 0.$$

В частности точки, сопряженные к a относительно экстремали $\mathbf{f}$, определяются уравнением

$$\det\{\tilde{f}_{iv_j}(a^*, \zeta)\} = 0.$$

Полученные результаты допускают *геометрическое* описание. В $(n+1)$-мерном пространстве точек $(t, \mathbf{x})$ рассмотрим множество $C_{a\xi}$, определяемое уравнениями

$$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{v}), \quad \det\{\tilde{f}_{iv_j}(t, \mathbf{v})\} = 0, \qquad (15)$$

где $t \in \Delta$, $\|\mathbf{v} - \zeta\| < \varepsilon$. В типичном случае $C_{a\xi}$ есть *n-мерная поверхность, гиперповерхность*. Если график экстремали $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot, \mathbf{v})$ не имеет общих точек с множеством $C_{a\xi}$, то интервал Δ не содержит точек, сопряженных на $\tilde{\mathbf{f}}(\cdot, \mathbf{v})$ к точке a. Если график экстремали имеет общие точки с множеством $C_{a\xi}$, то первые компоненты этих точек (абсциссы этих точек) — точки, сопряженные к a. При $n = 1$ уравнения, определяющие $C_{a\xi}$, имеют вид

$$x = \tilde{f}(t, v), \quad \tilde{f}_v(t, v) = 0.$$

В типичном случае $C_{a\xi}$ — *огибающая графиков экстремалей пучка. Если график экстремали* $\tilde{f}(\cdot, v)$ *не имеет точек касания с огибающей, то интервал* Δ *не содержит точек, сопряженных к* a *на данной экстремали. Если график имеет точку касания с огибающей, то интервал* Δ *содержит точки, сопряженные к* a.

28. **Примеры.** Применим результаты предыдущих пунктов к примерам, рассмотренным в § 2. Там изучался функционал вида

$$I(f) = \int_\Delta f^\varkappa(t)\left(1+f'^2(t)\right)^{1/2} dt, \qquad n=1.$$

Функционал I считался заданным на открытом множестве Ω в пространстве $C^1(\Delta)$, состоящем из положительных функций. Так как $L_{vv}(t, x, v) = x^\varkappa(1+y^2)^{-3/2} > 0$, то точки экстремума функционала на множестве $\Omega \cap C^1_{\xi\eta}(\Delta)$ могут быть лишь точками минимума. Поведение экстремалей различно при $\varkappa < 0$ и $\varkappa > 0$.

Пусть $\varkappa < 0$. В этом случае существует единственная экстремаль, принадлежащая множеству $\Omega \cap C^1_{\xi\eta}(\Delta)$ (см. п. 13). Множество точек, удовлетворяющих уравнениям (15), при $\varkappa < 0$ пусто, огибающая пучка отсутствует (см. п. 14). Поэтому при $\varkappa < 0$ экстремаль — точка строгого минимума. В частности, экстремаль — точка строгого минимума в задаче о кратчайших на плоскости Лобачевского (пример 1), п. 16) и в задаче о брахистохроне (пример 2), п. 16).

Сложнее обстоит дело при $\varkappa > 0$ (см. п. 15). На этот раз графики экстремалей пучка $M_{a\xi}$ имеют огибающую $C_{a\xi}$ (см. п. 14). Если точка (b, η) лежит под огибающей, то экстремаль, принадлежащая множеству $\Omega \cap C^1_{\xi\eta}$, не существует. Если $(b, \eta) \in C_{a\xi}$, то подобная экстремаль единственна. Если точка (b, η) лежит над огибающей, экстремалей, принадлежащих множеству $\Omega \cap C^1_{\xi\eta}$, две: $f_{v'}$ и $f_{v''}$. График экстремали $f_{v''}$ является более пологим, над интервалом (a, b) он расположен выше графика экстремали $f_{v'}$ (см. п. 15) и не имеет над $(a, b]$ точек касания с огибающей. График экстремали $f_{v'}$, напротив, имеет над интервалом (a, b) точку касания с огибающей. Это значит, что на экстремали $f_{v''}$ интервал $(a, b]$ не содержит точек, сопряженных к a, а на экстремали $f_{v'}$ содержит сопряженную точку. Следовательно, экстремаль $f_{v''}$ — точка строгого минимума функционала на множестве $\Omega \cap C^1_{\xi\eta}$; экстремаль $f_{v'}$ не является точкой экстремума.

Результаты предыдущих пунктов не позволяют ответить на вопрос, будет или нет точкой минимума экстремаль, график которой проходит через точку (b, η), лежащую на огибающей $C_{a\xi}$. Точно так же нельзя без дополнительных рассмотрений ответить на вопрос, будет или нет точкой минимума критическая точка $\mathbf{a}$ функции $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, второй дифференциал которой $d^2u(\mathbf{a}; \mathbf{h})$ положителен, но не положительно определен. В этом случае приходится исследовать поведение в точке $\mathbf{a}$ третьего и четвертого дифференциалов. В настоящей книге мы не будем обсуждать условия на точки экстремума для интегральных функционалов, содержащие вариации, порядок которых выше 2.

Если можно в квадратурах построить общее решение уравнения Эйлера, можно построить в квадратурах решение уравнения Якоби на любой экстремали. Для этого достаточно продифференцировать решение уравнения Эйлера по входящим в него параметрам. Имея явное представление для экстремалей $\tilde{f}(t, v)$ пучка $M_{a\xi}$, можно получить явное решение уравнения Якоби на экстремалях пучка, удовлетворяющее условию $u(a) = 0$.

Уравнение Эйлера для функционала I имеет вид (см. п. 11)

$$ff'' = \varkappa(1+f'^2).$$

Составляя уравнение в вариациях, получим уравнение Якоби

$$fh'' + hf'' = 2\varkappa f'h'.$$

Общий вид экстремали

$$f(t)=k\Phi^{-1}\left(\frac{|t-\tau|}{k}\right).$$

Производные по параметрам τ и k дают два линейно-независимых решения уравнения Якоби:

$$h_1(t)=\frac{\operatorname{sign}(\tau-t)}{\Phi'\left(\frac{f(t)}{k}\right)}=\operatorname{sign}(\tau-t)\operatorname{sign}\varkappa\sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^{2\varkappa}-1},$$

$$h_2(t)=\frac{f}{k}-\operatorname{sign}\varkappa\frac{|t-\tau|}{k}\sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^{2\varkappa}-1}.$$

В этих формулах справа $f=f(t)$.

Пусть $\varkappa=1$. Тогда

$$f(t)=k\operatorname{ch}\frac{t-\tau}{k}.$$

Уравнение Якоби имеет вид

$$h''-\frac{2}{k}\operatorname{th}\frac{t-\tau}{k}h'+\frac{1}{k^2}h=0,$$

частные решения:

$$h_1=\operatorname{ch}\frac{\tau-t}{k},\quad h_2=\operatorname{ch}\frac{\tau-t}{k}+\frac{\tau-t}{k}\operatorname{sh}\frac{\tau-t}{k}.$$

Экстремаль $\tilde{f}$ пучка $M_{a\xi}$, удовлетворяющая условию $\tilde{f}(a,\ v)=v$, была обозначена в п. 13 через f_v, так что $f_v(t)=\tilde{f}(t,\ v)$. Частная производная $\tilde{f}_y(t,\ v)$ функции $\tilde{f}$ по параметру $y=\xi/k$, связанному с v соотношением $y=(1+v^2)^{\frac{1}{2\varkappa}}$, вычислена в п. 13:

$$\frac{y^2}{\xi}\tilde{f}_y(t,\ v)\,\Phi'\left(\frac{y}{\xi}\tilde{f}(t,\ v)\right)=$$
$$=\operatorname{sign}(t-\tau)\operatorname{sign}v\operatorname{sign}\varkappa\,\theta(y)-\theta\left(\frac{y}{\xi}\tilde{f}(t,\ v)\right),$$

определение функции θ см. в п. 12. Производная $\tilde{f}_y(t,\ v)$ обозначена в п. 13 через $F_y(v)$.

Пусть, в частности, $\varkappa=\frac{1}{2}$ (см. пример 3), п. 16). Экстре али пучка $M_{a\xi}$ даются формулой

$$\tilde{f}(t,\ v)=\xi+v(t-a)+\frac{1+v^2}{4\xi}(t-a)^2.$$

Решение уравнения Якоби, удовлетворяющее условию $u(a)=0$, $u'(a)=1$, имеет вид

$$u(t)=\tilde{f}_v(t,\ v)=(t-a)+\frac{v}{2\xi}(t-a)^2.$$

При $v<0$ у этой функции есть корень $a^*>a$:

$$a^*=a-2\xi/v$$

Корень a^* — точка, сопряженная к точке a на экстремали $\tilde{f}(\cdot,\ v)$.

ГЛАВА II

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание главы группируется вокруг двух основных вопросов: задач на условный экстремум (§ 2) и экстремальных задач для интегральных функционалов, зависящих от функций нескольких переменных (§ 3). В обеих задачах применяются методы, которые можно рассматривать как естественное развитие методов предыдущей главы. В связи с задачами на условный экстремум часто приходится пользоваться теоремами типа *теоремы о производной сложной функции* и типа *теоремы о неявной функции*. Уже для функции $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ дифференциальное исчисление можно строить по-разному, отправляясь от понятия *производной вдоль вектора* или от понятия *дифференцируемости в точке*. Упомянутые теоремы проще формулировать и доказывать с помощью понятия дифференцируемости. Аналогично обстоит дело и для отображений нормированных пространств. Вариант дифференциального исчисления для отображений нормированных пространств, основанный на понятии дифференцируемости в точке, и его связь с понятием вариации вдоль вектора изложены в § 1. Здесь же затронуты и некоторые другие вопросы дифференциального исчисления, которые находят приложения в теории интегральных функционалов. Стоит отметить, что *отображения нормированных пространств определяют те естественные рамки, в которых действуют основные идеи дифференциального исчисления;* систематическое изложение можно найти в [1]. Так как идеи, с которыми встретится читатель в § 1, знакомы ему на примере отображений $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, некоторые доказательства, идущие по классическим образцам, будут опущены. В § 4 описана связь вариационного исчисления с механикой; с момента возникновения вариационного исчисления и до сих пор эта связь оставалась неразрывной и существенно влияла на развитие как вариационного исчисления, так и общих принципов механики.

§ 1. Дифференцируемые отображения нормированных пространств

29. Линейные и билинейные отображения. *Отображение* $F: E \to \tilde{E}$ *(E, $\tilde{E}$ — метрические пространства) называется непрерывным в точке* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in E$, *если для любой окрестности* V *точки* $F(\mathbf{a})$ *существует такая окрестность* U *точки* $\mathbf{a}$, *что* $F(\mathbf{x}) \in V$ *при всех* $\mathbf{x} \in U$. Отображение F называется *непрерывным (на пространстве E)*, если F непрерывно во всех точках пространства.

В п. 5 было показано, что *интегральный функционал I непрерывен на пространстве* $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Основной идеей дифференциального исчисления является идея аппроксимации общего отображения в окрестности фиксированного аргумента линейным отображением.

Отображение $l: E \to \tilde{E}$ (E, $\tilde{E}$ — нормированные пространства) *называется линейным, если оно обладает следующими двумя свойствами*:

1) $l(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 l(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 l(\mathbf{x}_2)$, α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in E$ (*дистрибутивность*);

2) *существует такое число c, что для любого* $\mathbf{x} \in E$ *справедливо неравенство* $\|l(\mathbf{x})\| \leqslant c\|\mathbf{x}\|$ (*ограниченность*).

Отметим, что для линейного отображения $l(0) = 0$.

Примерами линейных отображений могут служить *линейная функция* $l: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, *линейный оператор* $A: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ и *линейный интегральный функционал* L на пространствах $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Общий вид линейной функции $l: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, т. е. функции $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, удовлетворяющей условию дистрибутивности, таков:

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k x_i g_i = (\mathbf{x}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k) \in \mathbf{R}^k.$$

Поэтому $|l(\mathbf{x})| = |(\mathbf{x}, \mathbf{g})| \leqslant \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{g}\|$. Общий вид линейного оператора $A: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, т. е. отображения $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющего условию дистрибутивности, таков:

$$A\mathbf{x} = \left(\sum_{j=1}^k a_{1j}x_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^k a_{nj}x_j\right),$$

$\{a_{ij}\}_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, k}}$ — произвольная матрица (матрица оператора A). Поэтому

$$\|A\mathbf{x}\| \leqslant |A| \, \|\mathbf{x}\|,$$

см. п. 21.

Ограниченность линейного интегрального функционала на пространстве $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ установлена в п. 23:

$$|L(\mathbf{f})| \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{H^1}.$$

Так как $\|\mathbf{f}\|_{H^1} \leqslant |\Delta|^{1/2}\|\mathbf{f}\|_{C^1}$, то функционал L ограничен и на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

В общем случае отображение, обладающее свойством дистрибутивности, не обязательно ограничено.

Произвольное *линейное отображение непрерывно*, *что следует из оценки*

$$\| l(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - l(\mathbf{a}) \| = \| l(\mathbf{h}) \| \leqslant c \| \mathbf{h} \|.$$

Вместо слов «линейное отображение» иногда будем писать короче — «оператор». Аргумент линейного отображения нередко не будет заключаться в скобки и вместо $l(\mathbf{x})$ будет использоваться запись $l\mathbf{x}$.

Множество всех отображений $E \to \tilde{E}$ можно превратить в векторное пространство, полагая

$$(F_1+F_2)(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}), \quad (\alpha F)(\mathbf{x}) = \alpha F(\mathbf{x}).$$

Линейные отображения образуют в этом пространстве подпространство. Оно превращается в нормированное, если положить

$$\| l \| = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leqslant 1} \| l(\mathbf{x}) \|.$$

Конечность числа $\| l \|$ следует из ограниченности отображения l, причем $\| l \| \leqslant c$, где c — постоянная в условии ограниченности l. С другой стороны, при $\mathbf{x} \neq 0$

$$\| l(\mathbf{x}) \| = \left\| \|\mathbf{x}\| l\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \right\| = \|\mathbf{x}\| \left\| l\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \right\| \leqslant \|\mathbf{x}\| \sup_{\|\mathbf{y}\| \leqslant 1} \| l(\mathbf{y}) \|,$$

так что $\| l(\mathbf{x}) \| \leqslant \| l \| \|\mathbf{x}\|$. Это неравенство не зависит от предположения $\mathbf{x} \neq 0$ и показывает, что $\| l \|$ можно охарактеризовать как *наименьшую постоянную* c *в условии ограниченности* l. Читатель без труда самостоятельно проверит аксиомы нормы. Построенное нормированное пространство обозначают $\mathbf{L}(E \to \tilde{E})$.

Пусть E — нормированное пространство. Обозначим через E^2 множество, элементами которого являются *упорядоченные пары* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ элементов пространства E. Рассмотрим отображение $b: E^2 \to \tilde{E}$. *Его называют билинейным*, *если оно обладает следующими двумя свойствами*:

1) $$b(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha_1 b(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \alpha_2 b(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}),$$
$$b(\mathbf{x}, \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) = \alpha_1 b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + \alpha_2 b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2),$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in R$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \in E$ (*дистрибутивность*);

2) *существует такое число* c, *что для любой пары* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$ *справедливо неравенство* $\| b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \| \leqslant c \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ (*ограниченность*).

В этом определении координаты $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пары $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно считать принадлежащими разным пространствам: $\mathbf{x} \in E_1$, $\mathbf{y} \in E_2$. Множество подобных пар обозначается $E_1 \times E_2$. Таким образом, можно рассматривать билинейные отображения b: $E_1 \times E_2 \to \tilde{E}$.

Общий вид функции $b: (\mathbf{R}^k)^2 \to \mathbf{R}$, удовлетворяющей условию дистрибутивности, таков:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ij=1}^{k} b_{ij} x_i y_j = (B\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$\{b_{ij}\}_{i,\,j=1,\,\ldots,\,k}$ — произвольная матрица, B — оператор в $\mathbf{R}^k$, соответствующий этой матрице. Имеем, очевидно, $|b(\mathbf{x},\ \mathbf{y})| \leqslant \leqslant |B_{ij}| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, так что b — билинейное отображение.

Билинейный интегральный функционал B на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ был введен в п. 23. Там же показано, что он ограничен на пространстве $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, а следовательно, на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Таким образом, билинейный интегральный функционал — билинейное отображение $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ и $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$.

Множество билинейных отображений $b: E^2 \to \tilde{E}$ является векторным пространством; его легко превратить в нормированное, полагая

$$\|b\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{y}\| \leqslant 1} \|b(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\|.$$

Обозначим это нормированное пространство $\mathbf{L}_2(E \to \tilde{E})$.

Каждому билинейному отображению b можно сопоставить отображение $\hat{b} \in \mathbf{L}(E \to \mathbf{L}(E \to \tilde{E}))$, т. е. линейное отображение, сопоставляющее каждой точке $\mathbf{x} \in E$ линейное отображение $\hat{b}(\mathbf{x}): E \to \tilde{E}$. Отображение $\hat{b}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\hat{b}(\mathbf{x})\,\mathbf{y} = b(\mathbf{x},\ \mathbf{y}).$$

Проверим, что $\hat{b}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}(E \to \tilde{E})$. Так как дистрибутивность ясна, следует установить ограниченность $\hat{b}(\mathbf{x}): \|\hat{b}(\mathbf{x})\,\mathbf{y}\| = \|b(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\| \leqslant \leqslant c\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (c\|\mathbf{x}\|)\|\mathbf{y}\|$. Остается проверить, что $\hat{b}(\mathbf{x})$ зависит от $\mathbf{x}$ как линейное отображение, т. е. опять-таки установить ограниченность: $\|\hat{b}(\mathbf{x})\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|b(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\| \leqslant \sup_{\|\mathbf{y}\| \leqslant 1} c\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leqslant c\|\mathbf{x}\|$.

Отображение $k: E \to \tilde{E}$ называется *квадратичным*, если существует такое билинейное отображение $b: E^2 \to \tilde{E}$, что

$$k(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x},\ \mathbf{x}).$$

Примерами квадратичных отображений могут служить квадратичная функция $k(\mathbf{x}) = \sum_{ij=1}^{k} a_{ij}x_i x_j$ на $\mathbf{R}^k$ и квадратичный интегральный функционал на $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$.

Билинейное отображение b называется *симметричным*, если оно удовлетворяет соотношению $b(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = b(\mathbf{y},\ \mathbf{x})$.

Пусть k — квадратичное отображение. *Существует единственное симметричное билинейное отображение b, такое, что $k(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x},\ \mathbf{x})$.* Существование подобного отображения b очевидно: если b_1 — такое билинейное отображение, что $k(\mathbf{x}) = b_1(\mathbf{x},\ \mathbf{x})$, то $k(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x},\ \mathbf{x})$, где $b(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(b_1(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) + b_1(\mathbf{y},\ \mathbf{x}))$ — симметричное билинейное отображение. Единственность следует из формулы, которая позволяет восстановить симметричное отображение b по отображению k:

$$b(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \frac{1}{4}[k(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - k(\mathbf{x}-\mathbf{y})].$$

Для проверки вычислим правую сторону:

$$k(\mathbf{x}+\mathbf{y})-k(\mathbf{x}-\mathbf{y})=b(\mathbf{x}+\mathbf{y},\ \mathbf{x}+\mathbf{y})-b(\mathbf{x}-\mathbf{y},\ \mathbf{x}-\mathbf{y})=$$
$$=b(\mathbf{x},\ \mathbf{x})+b(\mathbf{y},\ \mathbf{y})+b(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+b(\mathbf{y},\ \mathbf{x})-b(\mathbf{x},\ \mathbf{x})-b(\mathbf{y},\ \mathbf{y})+$$
$$+b(\mathbf{x},\ \mathbf{y})+b(\mathbf{y},\ \mathbf{x})=4b(\mathbf{x},\ \mathbf{y}).$$

Билинейный интегральный функционал B, введенный в п. 23, симметричен и связан с квадратичным функционалом K соотношением $K(\mathbf{f})=B(\mathbf{f},\ \mathbf{f})$.

Отметим в заключение одно важное свойство *конечномерных* нормированных пространств и заданных на них линейных отображений.

Лемма (об эквивалентности норм в конечномерном пространстве). *Пусть* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ — *две нормы на конечномерном векторном пространстве* E. *Существуют числа* $\mu>0$ *и* $\nu>0$, *такие, что*

$$\mu\|\mathbf{x}\|_2\leqslant\|\mathbf{x}\|_1\leqslant\nu\|\mathbf{x}\|_2,\quad \mathbf{x}\in E.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для того случая, когда в качестве $\|\cdot\|_2$ выбрана какая-либо конкретная норма $\|\cdot\|_0$. В самом деле, если

$$\mu_1\|\mathbf{x}\|_0\leqslant\|\mathbf{x}\|_1\leqslant\nu_1\|\mathbf{x}\|_0,\quad \mu_2\|\mathbf{x}\|_0\leqslant\|\mathbf{x}\|_2\leqslant\nu_2\|\mathbf{x}\|_0,$$

то

$$\mu_1\nu_2^{-1}\|x\|_2\leqslant\|\mathbf{x}\|_1\leqslant\nu_1\mu_2^{-1}\|\mathbf{x}\|_2.$$

Фиксируем в E базис $\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$ и обозначим через $x_1,\ \ldots,\ x_n$ координаты вектора $\mathbf{x}:\mathbf{x}=\sum_i x_i\mathbf{e}_i$. Легко видеть, что

$$\|\mathbf{x}\|_0=(\sum_i x_i^2)^{1/2}$$

— норма в пространстве E. Формула $\mathbf{x}=\sum_i x_i\mathbf{e}_i$ и определение нормы $\|\mathbf{x}\|_0$ позволяют отождествить пространство с нормированным пространством $\mathbf{R}^n$. Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная норма, тогда

$$\|\mathbf{x}\|=\|\sum_i x_i\mathbf{e}_i\|\leqslant\sum_i\|x_i\mathbf{e}_i\|=\sum_i|x_i|\,\|\mathbf{e}_i\|\leqslant\max_i\|\mathbf{e}_i\|\sum_j|x_j|\leqslant$$
$$\leqslant\max_i\|\mathbf{e}_i\|(\sum_j 1)^{1/2}\|\mathbf{x}\|_0=\sqrt{n}\max_i\|\mathbf{e}_i\|\,\|\mathbf{x}\|_0.$$

Итак, $\|\mathbf{x}\|\leqslant\sqrt{n}\max_i\|\mathbf{e}_i\|\,\|\mathbf{x}\|_0$. Эта оценка означает, что $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|$ — непрерывная функция в нуле относительно нормы $\|\cdot\|_0$. Так как $\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{a}\|\leqslant\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$, то $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|$ непрерывна на E. На множестве точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{x}\|_0=1$, которое тождественно сфере в $\mathbf{R}^n$ (ограниченному и замкнутому множеству в $\mathbf{R}^n$), функция $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|$ положительна и, следовательно, в силу непрерывности $\|\mathbf{x}\|\geqslant\mu>0$. Это значит, что для любого $\mathbf{x}\neq 0$ $\left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_0}\right\|\geqslant\mu$, откуда $\|\mathbf{x}\|\geqslant\mu\|\mathbf{x}\|_0$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что любая окрестность нуля (а значит, и любой точки) относительно нормы $\|\cdot\|_1$ содержится в некоторой окрестности нуля относительно нормы $\|\cdot\|_2$ и, в свою очередь, содержит меньшую окрестность нуля относительно нормы $\|\cdot\|_2$.

Отсюда можно заключить, что *все конструкции, связанные с понятиями экстремума и непрерывности в конечномерных пространствах, не зависят от выбора конкретной нормы. Не зависят от выбора нормы и предстоящие построения, относящиеся к понятию дифференцируемости.*

Всякое *отображение* $E \to \tilde{E}$, *заданное на конечномерном пространстве* E *и удовлетворяющее условию дистрибутивности, — линейное отображение.* В самом деле, пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в E. Введем норму $\|\cdot\|_0$ и проверим ограниченность l относительно $\|\cdot\|_0$:

$$\|l\mathbf{x}\| = \|l \sum_i x_i \mathbf{e}_i\| = \|\sum_i x_i l(\mathbf{e}_i)\| \leqslant \sum_i |x_i| \|l(\mathbf{e}_i)\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_i \|l(\mathbf{e}_i)\| \sum_j |x_j| \leqslant \sqrt{n} \max_i \|l(\mathbf{e}_i)\| \|x\|_0.$$

30. Дифференцируемые отображения. *Отображение* $F: E \to \tilde{E}$ (E, $\tilde{E}$ — нормированные пространства) *называется дифференцируемым в точке* $\mathbf{a}$, *если существует такое линейное отображение* $F'(\mathbf{a}): E \to \tilde{E}$, *что*

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})\mathbf{h} + F_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}), \tag{1}$$

где $F_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ *обладает следующим свойством: отображение* $\mathbf{h} \to \|\mathbf{h}\|^{-1} F_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$, *доопределенное нулем в точке* $\mathbf{h} = 0$, *непрерывно в этой точке.*

Охарактеризованное выше свойство $F_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ будем кратко изображать записью

$$F_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|).$$

Отображение, *дифференцируемое* в точке $\mathbf{a}$, *непрерывно* в этой точке.

Соотношение (1) *однозначно определяет отображение* $F'(\mathbf{a})$. В самом деле, пусть кроме (1) выполняется соотношение

$$F(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + G\mathbf{h} + G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$$

с каким-либо линейным оператором $G: E \to \tilde{E}$, а $G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$. Тогда

$$l(\mathbf{h}) = F'(\mathbf{a})\mathbf{h} - G(\mathbf{h}) = G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) - F_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$$

и, следовательно, l — линейное отображение, обладающее свойством $l(h) = o(\|\mathbf{h}\|)$. Рассмотрим при $\alpha > 0$ функцию

$$\varphi(\alpha) = \alpha^{-1} \|\mathbf{h}\|^{-1} \|l(\alpha\mathbf{h})\|,$$

предполагая $\mathbf{h}$ фиксированным, $\mathbf{h} \neq 0$. Функция φ постоянна в силу линейности l: $\alpha^{-1}\|\mathbf{h}\|^{-1}\|l(\alpha\mathbf{h})\| = \alpha^{-1}\|\mathbf{h}\|^{-1}\|\alpha l(\mathbf{h})\| = \|\mathbf{h}\|^{-1}\|l(\mathbf{h})\|$. С другой стороны, $\varphi(\alpha) \to 0$. Действительно, если $\|\alpha\mathbf{h}\| = \alpha\|\mathbf{h}\|$ достаточно мало (этого можно добиться за счет малости α), то $\varphi(\alpha) < \varepsilon$, ε — произвольное положительное число. Итак, $\varphi(\alpha) = 0$. Тем самым, $G = F'(\mathbf{a})$.

Линейное отображение $F'(\mathbf{a})$ *называют производной отображения* F *в точке* $\mathbf{a}$. *Вектор* $F'(\mathbf{a})\mathbf{h}$ *называют дифференциалом*

отображения F в точке **a** (*отвечающим вектору* **h**) *и обозначают также* $dF(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$:

$$dF(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = F'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}.$$

Отображение F называют *дифференцируемым* (*на пространстве* E), если F дифференцируемо во всех точках. Если отображение F дифференцируемо, то наряду с ним может рассматриваться отображение $\mathbf{x} \to F'(\mathbf{x})$, заданное на E и принимающее значения в пространстве $\mathbf{L}(E \to \tilde{E})$. Это отображение обозначается F' и называется *производной* отображения F. Отображение F называют *непрерывно дифференцируемым*, если определено и непрерывно отображение $F'\colon\ E \to \mathbf{L}(E \to \tilde{E})$.

Примеры.

1) Для функций $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ дифференциал равен $df(a;\ h) = f'(a)\,h$, где $f'(a)$ — классически понимаемая производная функции f в точке a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Таким образом, в классическом смысле производная $f'(a)$ есть число, а в смысле введенного выше определения $f'(a)$ есть линейное отображение $h \to f'(a)\,h$. Выявленная двусмысленность терминологии не создает трудностей, так как из текста всегда ясно, в каком смысле используется термин «производная».

2) Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{u}\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$. Ей соответствует задание n функций от k переменных: $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \to \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_n(\mathbf{x}))$. Из дифференцируемости отображения $\mathbf{u}$ в точке $\mathbf{a}$ следует существование частных производных $u_{ix_j}(\mathbf{a})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$. Производная $\mathbf{u}'(\mathbf{a})$ — линейный оператор $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, матрица которого, называемая *матрицей Якоби* отображения $\mathbf{u}$ в точке $\mathbf{a}$, имеет вид

$$\{u_{ix_j}(\mathbf{a})\}_{\substack{i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, k}}.$$

В частности, при $n = 1$

$$u'(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = \sum\nolimits_{j=1}^{k} u_{x_j}(\mathbf{a})\,h_j = (\nabla u(\mathbf{a}),\ \mathbf{h}).$$

Понятие дифференцируемости и дифференциала в случае функций $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ совпадает с известным из начал анализа.

3) Отображение $\mathbf{w}\colon \mathbf{R} \to E$, E — нормированное пространство, будет называться *путем*. Производная $\mathbf{w}'(a)$ пути — отображение $\mathbf{R} \to E$. В силу линейности $\mathbf{w}'(a)\,h = h\mathbf{w}'(a)\,1$. Вектор $\mathbf{w}'(a)\,1$ часто обозначают короче $\mathbf{w}'(a)$ и по аналогии с примером 1) также называют производной пути в точке a.

4) Если $l \in \mathbf{L}(E \to \tilde{E})$, то l — дифференцируемое отображение и его производная постоянна: $l'(\mathbf{x}) = l$.

Непрерывная дифференцируемость интегрального функционала I на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. *Если* $I \in \Omega^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, *то* I *непрерывно дифференцируем, при этом* $dI(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$.

В том же объеме заключение верно при меньших предположениях: достаточно считать, что $I \in \Omega^1$. Мы предполагаем, что $I \in \Omega^2$ ради некоторого упрощения доказательства.

Докажем дифференцируемость функционала I. Рассуждая так же, как и при доказательстве достаточного условия экстремума в задаче со свободными граничными точками (см. п. 20), получим

$$L(t,\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) = L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) + dL(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ 0,\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v}) + \\ + L_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v}),$$

где при $(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$, $(t,\ \mathbf{x}+\Delta\mathbf{x},\ \mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}) \in D_N$

$$|L_1(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v};\ \Delta\mathbf{x},\ \Delta\mathbf{v})| \leqslant b_N(\|\Delta\mathbf{x}\|^2 + 2\|\Delta\mathbf{x}\|\|\Delta\mathbf{v}\| + \|\Delta\mathbf{v}\|^2) = \\ = b_N(\|\Delta\mathbf{x}\| + \|\Delta\mathbf{v}\|)^2$$

и

$$b_N = \frac{1}{2!}\Bigg[\sup_{1\leqslant i,\ j\leqslant n;\ (t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}})\in D_N} \left|L_{x_i x_j}\left(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\right)\right| + \sup\left|L_{x_i v_j}\left(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\right)\right| + \\ + \sup\left|L_{v_i v_j}\left(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\right)\right|\Bigg].$$

Если $\|\mathbf{f}\| \leqslant N$ и $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\| \leqslant N$, то

$$|I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) - I(\mathbf{f}) - \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})| = \left|\int_\Delta L_1(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t);\ \mathbf{h}(t),\ \mathbf{h}'(t))\,dt\right| \leqslant \\ \leqslant b_N \int_\Delta (\|\mathbf{h}(t)\| + \|\mathbf{h}'(t)\|)^2\,dt \leqslant b_N|\Delta|\,\|\mathbf{h}\|^2_{C^1}.$$

Таким образом, при $\|\mathbf{f}\| \leqslant N$, $\|\mathbf{f}+\mathbf{h}\| \leqslant N$ имеет место представление

$$I(\mathbf{f}+\mathbf{h}) = I(\mathbf{f}) + \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) + I_1(\mathbf{f};\ \mathbf{h}),$$

где

$$|I_1(\mathbf{f};\ \mathbf{h})| \leqslant b_N|\Delta|\,\|\mathbf{h}\|^2_{C^1}.$$

Так как интегральный функционал $\mathbf{h} \to \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$ ($\mathbf{f}$ — фиксировано) — линейное отображение, из полученного представления следует, что функционал I дифференцируем, причем $dI(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})$.

Отметим, что обозначение $I'(\mathbf{f})$, введенное в п. 5, согласуется с обозначениями настоящего пункта.

Докажем, что *отображение* $I : C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$ *непрерывно дифференцируемо, т. е. функционал* $I'(\mathbf{f})$ *непрерывно зависит от* $\mathbf{f}$. В п. 23 для линейного функционала

$$L(\mathbf{h}) = \int_\Delta [(\mathbf{g}_0(t),\ \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{h}'(t))]\,dt$$

была получена оценка

$$|L(\mathbf{h})| \leqslant (\|\mathbf{g}_0\|^2_H + \|\mathbf{g}_1\|^2_H)^{1/2}\,\|\mathbf{h}\|_{H^1}.$$

Следовательно,

$$|L(\mathbf{h})| \leqslant (\|\mathbf{g}_0\|^2_H + \|\mathbf{g}_1\|^2_H)^{1/2}\,|\Delta|^{1/2}\,\|\mathbf{h}\|_{C^1} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\,|\Delta|\max\{\|\mathbf{g}_0\|_C,\ \ \|\mathbf{g}_1\|_C\}\,\|\mathbf{h}\|_{C^1},$$

и тем самым

$$\|L\| \leqslant \sqrt{2}\,|\Delta|\max\{\|\mathbf{g}_0\|_C,\ \ \|\mathbf{g}_1\|_C\}.$$

Применим эту оценку к функционалу $I'(\mathbf{f}+\mathbf{h})-I'(\mathbf{f})$:

$$\|I'(\mathbf{f}+\mathbf{h})-I'(\mathbf{f})\|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{2}\,|\Delta|\max\Big\{\sup_{\Delta}\|\nabla_{\mathbf{x}}L(t,\ \mathbf{f}+\mathbf{h},\ \mathbf{f}'+\mathbf{h}')-\nabla_{\mathbf{x}}L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{h})\|_{\mathbf{R}^n},$$
$$\sup_{\Delta}\|\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{f}+\mathbf{h},\ \mathbf{f}'+\mathbf{h}')-\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{h})\|_{\mathbf{R}^n}\Big\}.$$

Если $\|\mathbf{f}\|,\ \|\mathbf{f}+\mathbf{h}\|\leqslant N$, то

$$\|I'(\mathbf{f}+\mathbf{h})-I'(\mathbf{f})\|\leqslant\sqrt{2}\,|\Delta|\,c_N\|\mathbf{h}\|_{C^1},$$

где

$$c_N=\max\Big\{\Big[\sup\Big|L_{x_ix_j}\big(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\big)\Big|+\sup\Big|L_{x_iv_j}\big(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\big)\Big|\Big],$$
$$\Big[\sup\Big|L_{x_iv_j}\big(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\big)\Big|+\sup\Big|L_{v_iv_j}\big(t,\ \tilde{\mathbf{x}},\ \tilde{\mathbf{v}}\big)\Big|\Big]\Big\}.$$

Из этой оценки следует непрерывность I'.

31. Сложная функция. Пусть заданы отображения $G:E_1\to E_2$ и $F:E_2\to E_3$. Их *композицией* (или *сложной функцией*) *называют отображение* $H:E_1\to E_3$, *определяемое формулой* $H(\mathbf{x})=F\cdot G(\mathbf{x}))$. Композицию обозначают $H=E\circ G$. Если F и G — операторы, т. е. линейные отображения, то вместо $F\circ G$ обычно пишут $F\circ G$ или FG и вместо слова «*композиция*» используют слово «*произведение*». Отметим следующие свойства сложной функции:

1) *если отображение G непрерывно в точке* $\mathbf{a}$, *а отображение F — в точке* $G(\mathbf{a})$, *то их композиция, отображение H, непрерывно в точке* $\mathbf{a}$;

2) *если отображение G дифференцируемо в точке* $\mathbf{a}$, *а отображение H — в точке* $G(\mathbf{a})$, *то отображение H дифференцируемо в точке* $\mathbf{a}$. *При этом выполняется соотношение*

$$dH(\mathbf{a};\ \mathbf{h})=dF(G(\mathbf{a});\ dG(\mathbf{a};\ \mathbf{h}))\quad \textit{или}\quad H'(\mathbf{a})=F'(G(\mathbf{a}))\,G'(\mathbf{a});$$

3) *если отображения G и F непрерывно дифференцируемы, то непрерывно дифференцируемо и отображение H.*

Доказательство свойств 1) — 3) идет по образцам, известным из начал анализа. Ясно, что свойство 3) — следствие свойств 1), 2). Ограничимся доказательством свойства 2). Итак, пусть

$$G(\mathbf{a}+\mathbf{h})=G(\mathbf{a})+G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}),$$
$$F(\mathbf{g}+\mathbf{k})=F(\mathbf{g})+F'(\mathbf{g})\,\mathbf{k}+F_1(\mathbf{g};\ \mathbf{k}),$$

где $\mathbf{g}=G(\mathbf{a})$. Имеем

$$H(\mathbf{a}+\mathbf{h})=F(G(\mathbf{a}+\mathbf{h}))=F(G(\mathbf{a})+G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}))=$$
$$=F(\mathbf{g})+F'(\mathbf{g})\,(G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}))+F_1(\mathbf{g};\ G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}))=$$
$$=F(\mathbf{g})+F'(\mathbf{g})\,G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+H_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}),$$

где $H_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})=F'(\mathbf{g})\,G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})+F_1(\mathbf{g};\ G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}))$. Следует доказать, что $H_1(\mathbf{a};\mathbf{h})=o(\|\mathbf{h}\|)$. Достаточно установить соотношения

$$F'(\mathbf{g})\,G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})=o(\|\mathbf{h}\|)\quad\text{и}\quad F_1(\mathbf{g};\ G'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}+G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h}))=o(\|\mathbf{h}\|).$$

Первое следует из неравенства

$$\|F'(\mathbf{g})G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| \leqslant \|F'(\mathbf{g})\|\,\|G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| = \|F'(\mathbf{g})\|\,o(\|\mathbf{h}\|) = o(\|\mathbf{h}\|).$$

Обратимся ко второму. Заметим прежде всего, что при достаточно малых $\|\mathbf{h}\|$ существует такая постоянная c, что $\|G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| \leqslant c\|\mathbf{h}\|$. Поэтому $\|G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| \leqslant \|G'(\mathbf{a})\ \mathbf{h}\| + \|G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| \leqslant c_1\|\mathbf{h}\|$, где $c_1 = \|G'(\mathbf{a})\| + c$, а $\|\mathbf{h}\|$ достаточно мала. Благодаря основному свойству F_1

$$\|F_1(\mathbf{g};\ G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| \leqslant \varepsilon\ \|G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\| \leqslant \varepsilon c_1\|\mathbf{h}\|,$$

причем ε может быть сделано сколь угодно малым за счет погружения вектора $G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ в достаточно малую окрестность нуля, чего можно достичь, в свою очередь, за счет погружения вектора $\mathbf{h}$ в достаточно малую окрестность нуля. Последняя оценка означает, конечно, что $F_1(\mathbf{g};\ G'(\mathbf{a})\mathbf{h} + G_1(\mathbf{a};\ \mathbf{h})) = o(\|\mathbf{h}\|)$. Свойство 2) доказано.

Производная вдоль пути. *Если путь* $\mathbf{w}: \mathbf{R} \to E$ *дифференцируем в точке* a, *а отображение* $F: E \to \tilde{E}$ *дифференцируемо в точке* $\mathbf{w}(a)$, *то путь* $\varphi = F \circ \mathbf{w}$ *дифференцируем в точке* a, *причем*

$$\varphi'(a) = F'(\mathbf{w}(a))\,\mathbf{w}'(a).$$

Это утверждение — следствие свойства 2) сложной функции.

Путь $\mathbf{w}(\alpha) = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{h}$ ($\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$ — фиксированные векторы из E) дифференцируем, при этом $\mathbf{w}'(\alpha) = \mathbf{h}$.

Если функционал $I: E \to \mathbf{R}$ *дифференцируем в точке* $\mathbf{a}$, *то* I *имеет вариацию в точке* $\mathbf{a}$, *при этом* $\delta I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = dI(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$.

Соотношение $\delta I(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = dI(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ для интегрального функционала, которое следует из последнего утверждения, было установлено выше прямым вычислением.

Точка $\mathbf{a}$ *называется критической точкой функционала* I, *если* I *дифференцируем в точке* $\mathbf{a}$ *и* $I'(\mathbf{a}) = 0$. Так как критическая точка является *стационарной точкой функционала* I, то *точка экстремума* $\mathbf{a}$ *является критической точкой, если, конечно, функционал* I *дифференцируем в точке* $\mathbf{a}$ (*необходимое условие экстремума*).

32. Вторая производная. Пусть $F: E \to \tilde{E}$ — дифференцируемое отображение. Производная $F'(\mathbf{x})$ есть элемент пространства $\mathbf{L}(E \to \tilde{E})$.

Говорят, что F *дважды дифференцируемо в точке* $\mathbf{a}$, *если существует такое билинейное отображение* $F''(\mathbf{a}): E^2 \to \tilde{E}$, *что выполняется соотношение*

$$F'(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F'(\mathbf{a}) + \widehat{F''(\mathbf{a})}(\mathbf{h}) + F'_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h}), \tag{2}$$

в котором $\widehat{F''(\mathbf{a})}$ — *отображение из* $\mathbf{L}(E \to \mathbf{L}(E \to \tilde{E}))$, *стандартно порождаемое билинейным отображением* $F''(\mathbf{a})$ (см. п. 29), *а* $F'_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ — *элемент из* $\mathbf{L}(E \to \tilde{E})$, *обладающий свойством* $F'_2(\mathbf{a};\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

Применим равенство (2) к вектору $\mathbf{g} \in E$:

$$F'(\mathbf{a}+\mathbf{h})\,\mathbf{g} = F'(\mathbf{a})\,\mathbf{g} + F''(\mathbf{a})(\mathbf{h},\ \mathbf{g}) + F_2'(\mathbf{a};\ \mathbf{h},\ \mathbf{g}). \qquad (2')$$

Здесь $F_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h},\ \mathbf{g}) = F_2'(\mathbf{a};\ \mathbf{h})\,\mathbf{g}$. Соотношение (2′) можно наравне с (2) использовать для определения двукратной дифференцируемости, при этом вектор $F_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h},\ \mathbf{g})$ следует характеризовать условием

$$\sup_{\|\mathbf{g}\| \leqslant 1} \|F_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h},\ \mathbf{g})\| = o(\|\mathbf{h}\|).$$

Соотношение (2) или (2′) однозначно определяет билинейное отображение $F''(\mathbf{a})$. *Его называют второй производной отображения F в точке* $\mathbf{a}$.

Можно показать, что $F''(\mathbf{a})$ — *симметричное билинейное отображение*, поэтому оно вполне определяется квадратичным функционалом $\mathbf{h} \to F''(\mathbf{a})(\mathbf{h},\ \mathbf{h}) = d^2F(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$. Вектор $d^2F(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ принято называть *вторым дифференциалом* отображения F в точке $\mathbf{a}$ (отвечающим вектору $\mathbf{h}$). Может быть также доказана *формула Тейлора*: *если отображение F дважды дифференцируемо в точке* $\mathbf{a}$, *то справедливо соотношение*

$$F(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + dF(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) + \frac{1}{2}\,d^2F(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) + F_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h}), \qquad (3)$$

где $F_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h})$ обладает следующим свойством: $F_2(\mathbf{a};\ \mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\,o(\|\mathbf{h}\|)$. Таким образом, погрешность формулы (3) равномерна относительно направления $\hat{\mathbf{h}}$ вектора $\mathbf{h}$ (см (2), п. 17).

Отображение F называют *дважды дифференцируемым*, если оно дважды дифференцируемо во всех точках. Если отображение дважды дифференцируемо, можно рассмотреть отображение $F'': E \to \mathbf{L}_2(E \to \tilde{E})$, действующее по формуле $\mathbf{x} \to F''(\mathbf{x})$. Если отображение F'' непрерывно, говорят, что отображение F *дважды непрерывно дифференцируемо*.

Вместо слов «отображение $F: E \to \tilde{E}$ r раз $(r = 1,\ 2)$ непрерывно дифференцируемо» условимся в дальнейшем писать $F \in C^r(E \to \tilde{E})$. Иногда отображение F будет задано не всюду на E, а на некотором множестве $D \subset E$. Если D — *открытое множество*, соотношение $F \in C^r(D \to \tilde{E})$ и выражение «отображение F r раз непрерывно дифференцируемо» сохраняют непосредственный смысл. Если D не является открытым множеством, соотношение $F \in C^r(D \to \tilde{E})$ означает, что существует такое открытое множество D_1, $D \subset D_1$, и отображение $F_1 \in C^r(D_1 \to \tilde{E})$, что ограничение отображения F_1 на D совпадает с F. Символ $C^r(D \to \tilde{E})$ будет иногда использоваться и при $r > 2$. Хотя не составило бы труда, следуя изложенным построениям, определить r-кратную дифференцируемость для отображений $F: E \to \tilde{E}$, мы не станем этого делать. Соотношение $F \in C^r(E \to \tilde{E})$ или $F \in C^r(D \to \tilde{E})$ будет использоваться при $r > 2$ только в тех случаях, когда D — множество евклидова пространства $\mathbf{R}^k$ и $\tilde{E} = \mathbf{R}^n$ — также евклидово простран-

ство. В этом случае определение r-кратной дифференцируемости может быть дано покоординатно на основе классических построений. Условимся, как всегда, сокращать символ $C^r(D \to \mathbf{R})$ до $C^r(D)$, а иногда вообще вместо $C^r(D \to \tilde{E})$ будем писать C^r.

Примеры.

1) Для функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ классически понимаемая вторая производная $f''(a)$ — число; в смысле введенного выше определения вторая производная $f''(a)$ есть билинейное отображение $(h, g) \to \to \alpha hg$, $h, g \in \mathbf{R}$, где α совпадает с классической производной $f''(a)$.

2) Если функция $\mathbf{u}: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ дважды дифференцируема в точке $\mathbf{a}$, то в этой точке существуют частные производные второго порядка $u_{x_i x_j}(a)$. При этом

$$u''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \sum_{i, j=1}^{k} u_{x_i x_j}(\mathbf{a}) h_j g_i.$$

Эта формула сохраняется и для отображений $\mathbf{u}: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, если понимать частные производные *покоординатно*:

$$\mathbf{u}_{x_i x_j}(\mathbf{a}) = (u_{1 x_i x_j}(\mathbf{a}), \ \ldots, \ u_{n x_i x_j}(\mathbf{a})).$$

Несложно доказать следующее утверждение. *Если отображение G дважды дифференцируемо в точке* $\mathbf{a}$, *а отображение F дважды дифференцируемо в точке* $G(\mathbf{a})$, *то композиция $H = F \circ G$ дважды дифференцируема в точке* $\mathbf{a}$, *при этом*

$$H''(G(\mathbf{a}))(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = F''(G(\mathbf{a}))(G'(\mathbf{a})\mathbf{h}, \ G'(\mathbf{a})\mathbf{g}) + F'(G(\mathbf{a}))G''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

и

$$d^2H(G(\mathbf{a}); \ \mathbf{h}) = d^2F(G(\mathbf{a}); \ G'(\mathbf{a})\mathbf{h}) + dF(G(\mathbf{a}); \ d^2G(\mathbf{a}; \ \mathbf{h})).$$

Пусть, в частности, в качестве отображения G фигурирует путь вида $\mathbf{w}(\alpha) = \mathbf{a} + \alpha\mathbf{h}$. Тогда $\mathbf{w}'(\alpha) = \mathbf{h}$ и $\mathbf{w}''(\alpha) = 0$. При этом для $\varphi = F \circ \mathbf{w}$ имеем

$$\varphi''(\alpha) = d^2F(\mathbf{w}(\alpha); \ \mathbf{h}).$$

Пусть функционал I дважды дифференцируем в точке $\mathbf{a}$. *Тогда функционал имеет в точке* $\mathbf{a}$ *вторую вариацию* $\delta^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h})$, *причем* $\delta^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = d^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h})$. *Если* $\mathbf{a}$ — *его точка минимума (максимума), то* $d^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) *при всех* $\mathbf{h}$. *Если* $\mathbf{a}$ — *критическая точка функционала и существует такая постоянная* $\mu > 0$, *что* $d^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) \geqslant \mu \|\mathbf{h}\|^2$, *то* $\mathbf{a}$ — *точка минимума функционала* I.

Первое утверждение следует из свойств второй вариации в точке экстремума и равенства $\delta^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h}) = d^2 I(\mathbf{a}; \mathbf{h})$. Второе утверждение доказано в п. 20 для функций $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$. Доказательство без изменений переносится на общие функционалы. Для интегральных функционалов второе утверждение, как отмечалось, не имеет непосредственных приложений.

Двукратная непрерывная дифференцируемость интегрального функционала I на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. *Если $I \in \Omega^3(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то функционал I дважды непрерывно дифференцируем, при этом*

$$d^2 I(\mathbf{f}; \ \mathbf{h}) = \delta^2 I(\mathbf{f}; \ \mathbf{h}).$$

Заключение верно в предположении $I \in \Omega^2$. Предположение $I \in \Omega^3$ позволяет провести доказательство, используя рассуждения, подобные тем, с помощью которых было установлено, что функционал I непрерывно дифференцируем (см. п. 30). Читатель бесспорно сможет сделать это самостоятельно.

33. Частные производные. *Частные производные* возникают, когда рассматриваются отображения, заданные на пространствах вида $E = E_1 \times \ldots \times E_k$, где $E_1, \ldots, E_k$ — нормированные пространства. Пространство $E_1 \times \ldots \times E_k$ состоит из последовательностей $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ векторов, принадлежащих исходным пространствам: $\mathbf{x}_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, k$. Векторы $\mathbf{x}_i$ называются координатами вектора $\mathbf{x}$. Пространство $E_1 \times \ldots \times E_k$ легко превратить в нормированное, полагая

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k), \quad \alpha\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x}_1, \ldots, \alpha\mathbf{x}_k),$$
$$\|\mathbf{x}\| = (\|\mathbf{x}_1\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}_k\|^2)^{1/2}.$$

Здесь $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k)$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Проверим неравенство треугольника

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\|^2)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant [(\|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{y}_1\|)^2 + \ldots + (\|\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k\|)^2]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (\|\mathbf{x}_1\|^2 + \ldots + \|\mathbf{x}_k\|^2)^{1/2} + (\|\mathbf{y}_1\|^2 + \ldots + \|\mathbf{y}_k\|^2)^{1/2} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Первое неравенство опирается на неравенства треугольника в пространствах $E_1, \ldots, E_k$, второе — на неравенство треугольника в $\mathbf{R}^k$.

Если $E_1 = \ldots = E_k = E$, то $E_1 \times \ldots \times E_k = E^k$. Переход от нормированного пространства E к нормированному пространству E^k обобщает построения, которые ведут от $\mathbf{R}$ к $\mathbf{R}^k$.

Пусть отображение $F : E_1 \times \ldots \times E_k \to \tilde{E}$ дифференцируемо в точке $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Определим *частную производную* $F_{x_i}(\mathbf{a})$ по i-й координате в точке $\mathbf{a}$ — оператор $E_i \to \tilde{E}$, — полагая

$$F_{x_i}(\mathbf{a})\,\mathbf{h}_i = F'(\mathbf{a})\,(0, \ldots, 0, \mathbf{h}_i, 0, \ldots, 0), \qquad \mathbf{h}_i \in E_i.$$

Если F дифференцируемо всюду на E, то символ $F_{\mathbf{x}_i}$ обозначает отображение $\mathbf{x} \to F_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x})$, называемое частной производной отображения F по i-й координате. Производная $F'(\mathbf{a})$ может быть восстановлена в терминах частных производных:

$$F'(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{k} F_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{a})\,\mathbf{h}_i.$$

Последняя формула вытекает из линейности отображения $\mathbf{h} \to F'(\mathbf{a})\,\mathbf{h}$ и соотношения

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{k} (0, \ldots, 0, \mathbf{h}_i, 0, \ldots, 0).$$

Ясно, что введенное понятие частной производной полностью согласовано с привычным понятием, знакомым читателю для отображений $u : \mathbf{R}^k = \underbrace{\mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}}_{k \text{ раз}} \to \mathbf{R}$.

Несколько слов об обозначениях. Если пространства $E_1, \ldots, E_k$ имеют разную природу, то их точки — координаты вектора $\mathbf{x}$ — обычно обозначают разными буквами, а не единой буквой с индексом. Например, вектор пространства $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ уже обозначался и часто будет обозначаться в дальнейшем $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$. В таком случае вместо $F_{\mathbf{x}_1}, F_{\mathbf{x}_2}, F_{\mathbf{x}_3}$ пишут $F_t, F_{\mathbf{x}}, F_{\mathbf{v}}$. Обозначения $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_i}$ и $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} F$ также будут использоваться наряду с $F_{\mathbf{x}_i}$, но иногда эти обозначения будут применяться в несколько ином смысле. Пусть F — отображение $E \times E' \to \tilde{E}$, где $E = E_1 \times \ldots \times E_k$. Пусть, кроме того, G — отображение $E \to E'$. Рассмотрим отображение $H: E \to \tilde{E}$ вида $H(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x}))$. Для производных $H_{\mathbf{x}_i}$ и будет использоваться обозначение $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} F(\mathbf{x}, G(\mathbf{x}))$.

Переход к *частным производным второго порядка* не вызывает трудностей. Пусть вновь $F: E = E_1 \times \ldots \times E_k \to \tilde{E}$, причем отображение F дважды дифференцируемо в точке $\mathbf{a}$. В этом случае определена производная $F''(\mathbf{a})$ — билинейное отображение $E \times E \to \tilde{E}$. Частную производную $F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}(\mathbf{a})$ в точке $\mathbf{a}$ — билинейное отображение $E_j \times E_i \to \tilde{E}$ — определим формулой

$$F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}(\mathbf{a})(\mathbf{h}_j, \mathbf{g}_i) = F''(\mathbf{a})((0, \ldots, \mathbf{h}_j, \ldots 0), (0, \ldots, \mathbf{g}_i, \ldots 0)),$$

$\mathbf{h}_j \in E_j$, $\mathbf{g}_i \in E_i$. Если F дважды дифференцируемо всюду на E, то символ $F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}$ обозначает отображение $\mathbf{x} \to F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}(\mathbf{x})$. Производная $F''(\mathbf{a})$ может быть восстановлена в терминах частных производных:

$$F''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \sum_{i, j=1}^{k} F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}(\mathbf{a})(\mathbf{h}_j, \mathbf{g}_i).$$

В п. 32 отмечалось, что $F''(\mathbf{a})$ — *симметричное* билинейное отображение: $F''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = F''(\mathbf{a})(\mathbf{g}, \mathbf{h})$. Отсюда следует

$$F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}(\mathbf{a})(\mathbf{h}_j, \mathbf{g}_i) = F_{\mathbf{x}_j \mathbf{x}_i}(\mathbf{a})(\mathbf{g}_i, \mathbf{h}_j).$$

Производную $F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}$ можно вычислить как частную производную по $\mathbf{x}_i$ отображения $F_{\mathbf{x}_j}$. Смысл указанной симметрии состоит в том, что $F_{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}$ можно также вычислить и как частную производную по $\mathbf{x}_j$ отображения $F_{\mathbf{x}_i}$.

34. Градиент. Общий вид линейного отображения $l: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ дается формулой

$$l(\mathbf{h}) = (\mathbf{g}, \mathbf{h}),$$

где $\mathbf{g}$ — некоторый фиксированный вектор из $\mathbf{R}^k$, однозначно определяемый функцией l. Это позволяет вместо производной $u'(\mathbf{a})$ функции $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, т. е. некоторого линейного отображения, рассматривать *вектор* $\nabla u(\mathbf{a}) \in \mathbf{R}^k$, который определяется соотношением

$$u'(\mathbf{a})\mathbf{h} = (\nabla u(\mathbf{a}), \mathbf{h})$$

и называется *градиентом* функции u в точке $\mathbf{a}$. Координаты градиента $\nabla u(\mathbf{a})$ — частные производные: $\nabla u(\mathbf{a}) = (u_{x_1}(\mathbf{a}), \ldots, u_{x_k}(\mathbf{a}))$.

Общий вид билинейного отображения $b: (\mathbf{R}^k)^2 \to \mathbf{R}$ дается формулой

$$b(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = (A\mathbf{h}, \mathbf{g}),$$

где A — некоторый фиксированный оператор в $\mathbf{R}^k$, однозначно определяемый функцией b. Это позволяет вместо второй производной $u''(\mathbf{a})$ функции $u: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, т. е. некоторого билинейного отображения, рассматривать оператор $\nabla u'(\mathbf{a})$, который определяется соотношением

$$u''(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = (\nabla u'(\mathbf{a})\mathbf{h}, \mathbf{g}).$$

Матрица оператора $\nabla u'(\mathbf{a})$ имеет вид $\{u_{x_i x_j}(\mathbf{a})\}$.

Построения, относящиеся к оператору $\nabla u'(\mathbf{a})$, допускают обобщение. Пусть $u: \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$. Будем обозначать точки пространства $\mathbf{R}^k$ буквой $\mathbf{x}$, а точки пространства $\mathbf{R}^l$ — буквой $\mathbf{y}$. Производная $u_{\mathbf{xy}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ принадлежит $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l)$. Вместо нее иногда бывает удобно ввести, что уже и было сделано в п. 8, операторы $\nabla_{\mathbf{x}} u_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\nabla_{\mathbf{y}} u_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, действующие из $\mathbf{R}^l$ в $\mathbf{R}^k$ и из $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^l$ соответственно и определяемые соотношениями

$$u_{\mathbf{xy}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = (\nabla_{\mathbf{x}} u_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{h}, \mathbf{g}),$$
$$u_{\mathbf{xy}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = (\nabla_{\mathbf{y}} u_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{g}, \mathbf{h}).$$

Матрицы операторов $\nabla_{\mathbf{x}} u_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\nabla_{\mathbf{y}} u_{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ имеют вид

$$\{u_{x_i y_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}_{\substack{i=1, \ldots, k, \\ j=1, \ldots, l}} \qquad \{u_{y_i x_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\}_{\substack{i=1, \ldots, l \\ j=1, \ldots, k}}.$$

На произвольном евклидовом пространстве E формула

$$l(\mathbf{h}) = (\mathbf{g}, \mathbf{h}) \tag{4}$$

также определяет некоторый линейный функционал, но, вообще говоря, не дает произвольного линейного функционала. В пространстве $H(\Delta)$ линейным функционалом будет отображение

$$h \to \int_\Delta g_1(t)\, h(t)\, dt,$$

где g_1 — произвольная кусочно-непрерывная функция. Дистрибутивность такого отображения очевидна, ограниченность является следствием неравенства Коши

$$\left|\int_\Delta g_1(t)\, h(t)\, dt\right|^2 \leqslant \int_\Delta g_1^2(t)\, dt \int_\Delta h^2(t)\, dt,$$

справедливого, конечно, для всех функций из класса, к которому принадлежит g_1. Построенный функционал не может быть записан в виде (4) с какой-нибудь непрерывной функцией g вместо g_1, если функция g_1 не может быть превращена в непрерывную пере-

определением значений в точках разрыва. Если бы такая запись была возможна, то интеграл

$$\int_{\Delta} [g_1(t) - g(t)]\, h(t)\, dt$$

был бы равен нулю для всех непрерывных функций h. Из леммы Лагранжа (см. п. 7) следует, что на всяком подынтервале интервала Δ, на котором функция g_1 непрерывна, $g_1 = g$, что невозможно при указанном выборе g_1.

Условимся называть функционалы вида (4) на евклидовом пространстве *функционалами типа скалярного произведения*. Среди метрических, а тем самым нормированных и евклидовых пространств содержится важный класс так называемых *полных пространств*. Полные нормированные пространства называются *банаховыми*, полные евклидовы — *гильбертовыми*. Полные пространства, говоря кратко, характеризуются тем, что в них справедлив *критерий Коши* для сходящихся последовательностей. Точное определение будет дано в п. 55. К числу полных пространств принадлежат $\mathbf{R}^n$, $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Пространства $H(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ и $H^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ с интегральными нормами не являются полными. На гильбертовом пространстве всякий линейный функционал является функционалом типа скалярного произведения. На такие пространства без изменений переносится понятие градиента $\nabla I(\mathbf{a})$. В общем случае появление вектора $\nabla I(\mathbf{a}) \in E$ (градиента) (I — функционал на евклидовом пространстве) означает, что производная $I'(\mathbf{a})$ *допускает представление*

$$I'(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = (\mathbf{g},\ \mathbf{h})$$

с некоторым вектором $\mathbf{g} \in E$. Вектор $\mathbf{g}$ определяется этим представлением однозначно и обозначается $\nabla I(\mathbf{a})$. Однозначность вектора $\mathbf{g}$ устанавливается элементарно. Если имеют место два представления

$$I'(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = (g,\ \mathbf{h}) \quad \text{и} \quad I'(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = (\mathbf{g}_1,\ \mathbf{h}),$$

то $(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g},\ \mathbf{h}) = 0$ при всех $\mathbf{h}$. Положим $\mathbf{h} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}$, тогда $(\mathbf{g}_1 - \mathbf{g},\ \mathbf{h}) = \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}\|^2 = 0$, откуда следует $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}$.

35. Вариационные производные. Понятие градиента полезно тем, что позволяет обходиться при дифференцировании функционала $I : E \to \mathbf{R}$ элементами исходного пространства E без введения элементов нового пространства $\mathbf{L}(E)$ — пространства линейных функционалов на E. Для интегральных функционалов возможна другая реализация этой же идеи, идеи исключения новых объектов, которая оказывается более удобной в формульном плане. Читателю, вероятно, известен параллелизм между векторами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ и функциями $f(t) \in \mathbf{R}$, $t \in \Delta$, который состоит в том, что функция f рассматривается как вектор с бесконечным числом координат $f(t)$, нумеруемых аргументом $t \in \Delta$. Сумме

$\sum_{i=1}^{k} x_i$ при таком параллелизме сопоставляется интеграл $\int_\Delta f(t)\,dt$. Линейной функции

$$l(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{k} g_i h_i = (\mathbf{g},\ \mathbf{h})_{\mathbf{R}^k}$$

следует при этом сопоставить функционал

$$h \to \int_\Delta g(t)\,h(t)\,dt = (g,\ h)_H,$$

билинейной функции

$$b(\mathbf{h},\ \mathbf{g}) = \sum_{i,\ j=1}^{k} b_{ij} h_j g_i$$

следует сопоставить билинейный функционал

$$(h,\ g) \to \int_\Delta \int_\Delta b(t,\ s)\,h(s)\,g(t)\,dt\,ds.$$

Введем множество $S(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, в частности $S(\Delta) = S(\Delta \to \mathbf{R})$, элементами которого являются *бесконечно дифференцируемые финитные* на интервале Δ вектор-функции $\Delta \to \mathbf{R}^n$. Напомним, что вектор-функция называется финитной на интервале Δ, если она обращается в нуль в некоторых окрестностях граничных точек интервала.

Лемма (обобщенная лемма Лагранжа). *Функционал*

$$h \to \int_\Delta g(t)\,h(t)\,dt = (g,\ h)_H,$$

где $g \in C(\Delta)$, *на множестве* $S(\Delta)$ *равен нулю тогда и только тогда, когда* $g = 0$.

По поводу доказательства этой леммы см. п. 46, в котором лемма доказана сразу для случая нескольких переменных.

Если некоторый функционал L на множестве $S(\Delta)$ допускает представление $L(h) = (g,\ h)_H$, то функция g определяется функционалом однозначно. Это утверждение — следствие леммы.

Пусть L — линейный интегральный функционал

$$L(h) = \int_\Delta [g_0(t)\,h(t) + g_1(t)\,h'(t)]\,dt$$

на множестве $C^1(\Delta)$. Ограничив функционал L на $S(\Delta)$, можно привести его к виду $L(h) = (g,\ h)_H$. Действительно, интегрирование по частям дает $L(h) = (g,\ h)_H + g_1\, h|_\Delta$, где $g = g_0 - g_1'$. Так как $h(a) = h(b) = 0$, то $L(h) = (g,\ h)_H$, что и требовалось. Приведенная выкладка показывает, что преобразование L к виду $L(h) = (g,\ h)_H$ не является безусловным: следует предполагать, что $g_1 \in C^1$. В противоположном случае подобное представление для функционала L невозможно. Одновременно выкладка показывает, что функционал L не может быть восстановлен по своему ограничению на множество $S(\Delta)$.

Пусть E — нормированное пространство, элементами которого являются некоторые функции $\Delta \to \mathbf{R}$; пусть пространство E содержит множество $S(\Delta)$. Рассмотрим функционал $I: E \to \mathbf{R}$. Предпо-

ложим, что функционал I дифференцируем в точке f. Говорят, что *функционал I имеет в точке f вариационную производную, если существует такая функция $\lambda \in C(\Delta)$, что при всех $h \in S(\Delta)$ справедливо представление*

$$I'(f)h = (\lambda, h)_H.$$

При этом функцию λ называют *вариационной производной I на функции f* и обозначают

$$\lambda = \frac{\delta I(f)}{\delta f}.$$

Значение $\lambda(t)$ функции λ в точке t называют *вариационной производной функционала I на функции f в точке t* и обозначают

$$\lambda(t) = \frac{\delta I(f)}{\delta f(t)}.$$

Интегральный функционал $I \in \Omega^2(\Delta)$ дифференцируем на пространстве $C^1(\Delta)$ и его производная на функции $f \in C^2$ допускает представление

$$I'(f)h = (L[f], h)_H + p[f]h|_\Delta.$$

Если $h \in S(\Delta)$, то

$$I'(f)h = (L[f], h)_H.$$

Поэтому *интегральный функционал I на функциях $f \in C^2$ имеет вариационную производную,* причем

$$\frac{\delta I(f)}{\delta f} = L[f].$$

Нетрудно убедиться, что вариационную производную интегрального функционала можно вычислить с помощью простой предельной процедуры

$$\frac{\delta I(f)}{\delta f(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(f+h_\varepsilon) - I(f)}{\int_\Delta h_\varepsilon(\tau)\,d\tau}, \quad t \in (a, b).$$

Здесь h_ε, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, при каждом ε — функция из $C^1(\Delta)$, обладающая следующими свойствами: $h_\varepsilon \geqslant 0$, h_ε отлична от нуля лишь в ε-окрестности точки t, $\|h_\varepsilon\|_{C^1} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Читатель легко докажет последнюю формулу самостоятельно.

Вариационная производная $\delta I(f)/\delta f(t)$ во многих отношениях подобна частной производной $u_{x_i}(\mathrm{x})$ функции $u: \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}$. Наподобие частной производной вариационную производную $\delta I(f)/\delta f(t)$ можно интерпретировать как производную функционала I по t-й координате $f(t)$ аргумента f при фиксированных остальных координатах. Все формульные свойства частных производных переносятся при такой интерпретации на вариационные производные. В точке экстремума функционала вариационная производная обращается в нуль. Для интегрального функционала этот факт равносилен уравнению Эйлера $L[f] = 0$. Благодаря прозрачной аналогии с частными производными вариационные производные

оказываются удобными в формульных построениях; особенно часто вариационные производные используются в теоретической физике.

По образцу вариационной производной первого порядка можно ввести вариационную производную второго порядка. Предположим, что функционал I дважды дифференцируем в точке f. Говорят, что *функционал I имеет в точке f вариационную производную второго порядка, если на квадрате $\Delta \times \Delta \subset \mathbf{R}^2$ определена такая непрерывная функция λ, что справедливо представление*

$$I''(f)(h, g) = \int_\Delta \int_\Delta \lambda(t, s)\, h(s)\, g(t)\, ds\, dt,$$

в котором $h, g \in S(\Delta)$. Функцию λ называют *второй вариационной производной* функционала I; пишут

$$\lambda(t, s) = \frac{\delta^2 I}{\delta f(t)\, \delta f(s)}.$$

Следует отметить, что интегральный функционал I на $C^1(\Delta)$ не имеет второй вариационной производной с точки зрения нашего определения. При некотором обобщении этого определения он приобретает вторую вариационную производную, которая, однако, является не непрерывной, а так называемой *обобщенной* функцией.

Предыдущие построения легко переносятся на функционалы, заданные на пространстве E, состоящем из некоторых вектор-функций $\Delta \to \mathbf{R}^n$ и содержащем множество $S(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Нет надобности повторять все определения подробно, приведем лишь две основные формулы для первой и второй вариационных производных:

$$I'(\mathbf{f})\,\mathbf{h} = \left(\frac{\delta I(\mathbf{f})}{\delta \mathbf{f}}, \mathbf{h}\right)_H = \int_\Delta \left(\frac{\delta I(\mathbf{f})}{\delta \mathbf{f}(t)}, \mathbf{h}(t)\right)_{\mathbf{R}^n} dt = \int_\Delta \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta I(\mathbf{f})}{\delta f_i(t)}\, h_i(t)\, dt,$$

$$I''(\mathbf{f})(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \int_\Delta \int_\Delta \sum_{i, j=1}^{k} \frac{\delta^2 I}{\delta f_j(t)\, \delta f_i(s)}\, h_i(s)\, h_j(t)\, ds\, dt.$$

В этих формулах $\mathbf{h}, \mathbf{g} \in S(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Интегральный функционал $I \in \Omega^2(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ имеет вариационную производную в любой точке $\mathbf{f} \in C^2$, при этом $\delta I/\delta \mathbf{f} = L[\mathbf{f}]$.

§ 2. Условный экстремум

36. Условный экстремум для функций на конечномерном пространстве. Экстремальные задачи для функций на $\mathbf{R}^k$ при $k > 1$ гораздо богаче, чем при $k = 1$, так как при $k > 1$ приобретает смысл задача на *условный экстремум*. Задачи на условный экстремум для интегральных функционалов чрезвычайно разнообразны и часто возникают в приложениях. Здесь будут рассмотрены две основные задачи: *изопериметрическая задача и задача Лагранжа*; в них не искажается специфика интегральных функционалов и

условия экстремума, как обычно, выражаются в терминах дифференциальных уравнений. Мы ограничимся здесь лишь необходимыми условиями экстремума.

Напомним необходимые условия в задаче на условный экстремум для функций на $\mathbf{R}^k$. Эти факты не зависят от конкретных свойств пространства $\mathbf{R}^k$; они зависят лишь от его *конечномерности*. Ради удобства дальнейших ссылок сформулируем их сразу же для функций на общем конечномерном нормированном пространстве. Пусть E и $\tilde{E}$ — конечномерные нормированные пространства, обозначим размерность E через k, размерность $\tilde{E}$ — через l. Предположим, что $l < k$. На E задаются функция $u: E \to \mathbf{R}$ и отображение $g: E \to \tilde{E}$. Рассматривается множество M, состоящее из точек $\mathbf{x}$, аннулирующих отображение $g: M = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$. *Задача на условный экстремум — это задача отыскания точек экстремума функции u, ограниченной на M.* Отметим, что M, как и всякое подмножество метрического пространства E, — метрическое пространство. Экстремальная задача для функции u равносильна экстремальной задаче для функции вида

$$u_\lambda(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + \lambda(g(\mathbf{x})),$$

где λ — произвольная функция $\tilde{E} \to \mathbf{R}$. В дальнейшем функция λ будет всегда считаться *линейной*. Предположим, что функция u *дифференцируема*, а функция g *непрерывно дифференцируема*. Кроме того, будем предполагать, что производная $g'(\mathbf{x})$, которая является оператором $E \to \tilde{E}$, во всех точках $\mathbf{x} \in M$ *не вырождена*. Невырожденность $g'(\mathbf{x})$ означает, что множество значений оператора $g'(\mathbf{x})$ совпадает с $\tilde{E}$. Пусть $\mathbf{a} \in M$. Обозначим через $M_\mathbf{a}$, $M_\mathbf{a} \subset E$, и назовем *касательным подпространством* к M в точке $\mathbf{a}$ подпространство, состоящее из векторов ξ, удовлетворяющих условию $g'(\mathbf{a})\,\xi = 0$. Векторы подпространства $M_\mathbf{a}$ условимся называть *касательными векторами* к M в точке $\mathbf{a}$. Подпространство $M_\mathbf{a}$ имеет размерность $k - l$. Справедливы следующие утверждения:

1) *Если* $\mathbf{a}$ *— точка условного экстремума функции u, то* $u'(\mathbf{a})\,\xi = 0$, *где* $\xi \in M_\mathbf{a}$;

2) *Если* $\mathbf{a}$ *— точка условного экстремума, то существует такая линейная функция* $\lambda: \tilde{E} \to \mathbf{R}$, *что* $\mathbf{a}$ *— критическая точка функции* u_λ, *иначе говоря,* $u'_\lambda(\mathbf{a}) = u'(\mathbf{a}) + \lambda g'(\mathbf{a}) = 0$.

Второе утверждение известно под названием *правила множителей Лагранжа*. Напомним, что производная λ' линейной функции λ не зависит от аргумента и всюду на $\tilde{E}$ равна λ: $\lambda'(z) = \lambda$. Утверждение 1) означает, что производная функции u вдоль любого касательного вектора равна нулю. Утверждение 2) в сопоставлении с 1) означает, что производная всякой функции вида $\lambda \circ g$ вдоль касательного вектора равна нулю (что очевидно), а производная функции $\lambda \circ g$ вдоль векторов η, принадлежащих

какому-либо дополнительному подпространству N_a, может быть сделана произвольной за счет выбора λ и, в частности, равной $-u'(\mathbf{a})\boldsymbol{\eta}$.

Если $\tilde{E}=\mathbf{R}^l$, то множество M в координатной записи характеризуется соотношениями $g_i(\mathbf{x})=0$, $i=1, \ldots, l$. Отображение $\lambda: \tilde{E} \to \mathbf{R}$ можно задать вектором $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^l: \lambda(\mathbf{z})=(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z})$. В этом случае к правилу множителей удобно относиться следующим образом. Введем функцию $w: E \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$, определив ее формулой

$$w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})=u(\mathbf{x})+(\boldsymbol{\lambda}, g(\mathbf{x}))_{\mathbf{R}^l};$$

2′) *пара* $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})$, *где* $\mathbf{a}$ — *точка условного экстремума, а* $\boldsymbol{\lambda}$ — *множитель Лагранжа, существование которого утверждается в* 2), *является критической точкой функции* w.

В самом деле, уравнения, определяющие критическую точку, имеют вид

$$u'(\mathbf{x})+(\boldsymbol{\lambda}, g'(\mathbf{x}))=0, \quad g(\mathbf{x})=0.$$

Точка $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\lambda})$ удовлетворяет этим уравнениям.

Обратимся к идее доказательства утверждений 1) и 2). Введем в дополнение к M_a какое-либо подпространство $N_a \subset E$ размерности l, состоящее из векторов $\boldsymbol{\eta}$, не принадлежащих M_a. Всякий вектор $\mathbf{y} \subset E$ можно разложить (и притом единственным образом) в сумму

$$\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\xi} \in M_a, \quad \boldsymbol{\eta} \in N_a.$$

Существуют такая окрестность U_1 точки 0 на M_a и такое отображение $\varphi \in C^1(U_1 \to N_a)$, обладающее свойствами $\boldsymbol{\varphi}(0)=0$,

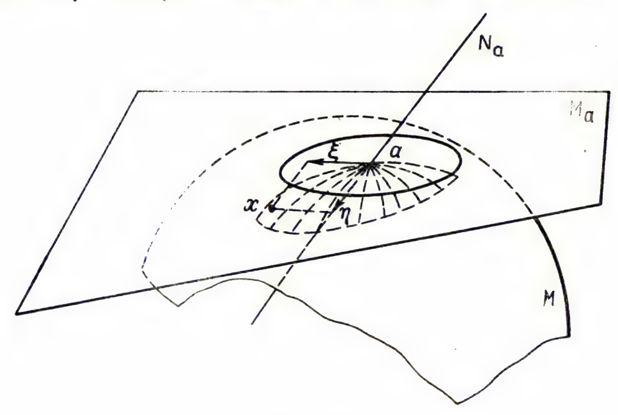


Рис. 15.

$\varphi'(0)=0$, что значения отображения $\psi: U_1 \to E$, действующего по формуле $\psi(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{a}+\boldsymbol{\xi}+\varphi(\boldsymbol{\xi})$, принадлежат M_a (рис. 15).

Благодаря непрерывности ψ точка $\psi(\boldsymbol{\xi})$ попадает в произвольно малую окрестность точки $\mathbf{a}$, если $\boldsymbol{\xi}$ оказывается в достаточно малой окрестности нуля. Поэтому 0 — точка безусловного экстре-

мума функции $v = u \circ \psi : U_1 \to \mathbf{R}$, если $\mathbf{a}$ — точка условного экстремума функции u.

Заметим, что $\psi'(\xi) = p + \varphi'(\xi)$, где p — оператор $M_\mathbf{a} \to E$, определяемый формулой $p\xi = \xi$. Так как $\varphi'(0) = 0$, то $\psi'(0) = p$.

Согласно теоремам о производных сложной функции,

а) $v'(0) = u'(\mathbf{a})\,\psi'(0) = u'(\mathbf{a})\,p$,

б) $v'(0) = u'_\lambda(\mathbf{a})\,p$.

Утверждение 1) вытекает теперь из формулы а). Утверждение 2) является алгебраическим следствием утверждения 1).

Обозначим через ν ограничение $g'(\mathbf{a})|_N$ оператора $g'(\mathbf{a})$ на подпространство $N_\mathbf{a}$; ограничение $g'(\mathbf{a})|_M$ оператора $g'(\mathbf{a})$ на $M_\mathbf{a}$, согласно определению $M_\mathbf{a}$, равно нулю. Пусть $\mathbf{y} = \xi + \eta$, $\xi \in M_\mathbf{a}$, $\eta \in N_\mathbf{a}$. Справедливо соотношение

$$g'(\mathbf{a})\,\mathbf{y} = g'(\mathbf{a})\,(\xi + \eta) = g'(\mathbf{a})\,\eta = \nu\eta.$$

Оператор $\nu : N_\mathbf{a} \to \tilde{E}$ задан на пространстве размерности l, его значения, согласно предположению, исчерпывают все пространство $\tilde{E}$ размерности l. Поэтому оператор ν обратим, обозначим обратный ν^{-1}. Оператор ν^{-1} удовлетворяет условию дистрибутивности; так как он задан на конечномерном пространстве, он — линейный оператор. Положим $\lambda = -u'(\mathbf{a})|_N\,\nu^{-1} : \tilde{E} \to \mathbf{R}$, где $u'(\mathbf{a})|_N$ — ограничение линейной функции $u'(\mathbf{a}) : E \to \mathbf{R}$ на $N_\mathbf{a}$. Имеем

$$u'(\mathbf{a})|_N + \lambda g'(\mathbf{a})|_N = 0.$$

Действительно, $u'(\mathbf{a})|_N = u'(\mathbf{a})|_N\,(\nu^{-1}\nu) = (u'(\mathbf{a})|_N\,\nu^{-1})\,\nu = -\lambda\nu = -\lambda g'(\mathbf{a})|_N$. С другой стороны,

$$u'(\mathbf{a})|_M + \lambda g'(\mathbf{a})|_M = 0.$$

В этом равенстве оба слагаемых равны нулю: $u'(\mathbf{a})|_M = 0$ в силу утверждения 1) ($u'(\mathbf{a})|_M = u'(\mathbf{a})\,p$ — ограничение $u'(\mathbf{a})$ на $M_\mathbf{a}$). Объединяя оба полученных равенства, находим

$$u'(\mathbf{a}) + \lambda g'(\mathbf{a}) = 0.$$

Утверждение 2) доказано.

37. Теорема о неявной функции. Предложенное в предыдущем пункте локальное описание множества M — следствие *теоремы о неявной функции*. Пусть $\Phi \in C^1(E_1 \times E_2 \to \tilde{E})$, где E_1, E_2 и $\tilde{E}$ — конечномерные нормированные пространства, причем размерности E_2 и $\tilde{E}$ одинаковы. Обозначим векторы E_1 через ξ, векторы E_2 — через η. Фиксируем точку $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in E_1 \times E_2$ и положим $\boldsymbol{\gamma} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$. Если $U_1 \subset E_1$ и $U_2 \subset E_2$, через $U_1 \times U_2$ условимся обозначать *цилиндрическое подмножество* $E_1 \times E_2$, состоящее из векторов (ξ, η), координаты которых удовлетворяют условиям $\xi \in U_1$, $\eta \in U_2$.

Теорема (о неявной функции). *Если* $\Phi_\eta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ — *невырожденный оператор* $E_2 \to \tilde{E}$, *то точка* $\boldsymbol{\alpha}$ *обладает такой окрестностью* $U_1 \subset E_1$, *а точка* $\boldsymbol{\beta}$ *обладает такой окрестностью* $U_2 \subset E_2$, *что множество*

точек (ξ, η), *принадлежащих* $U_1 \times U_2$ *и удовлетворяющих соотношению* $\Phi(\xi, \eta) = \gamma$, *совпадает с множеством точек, удовлетворяющих соотношению* $\eta = \varphi(\xi)$, *в котором* φ — *некоторое отображение из* $C^1(U_1 \to E_2)$. *При этом*

$$\varphi(\alpha) = \beta \ \text{ и } \ \Phi_\xi(\alpha, \beta) + \Phi_\eta(\alpha, \beta)\varphi'(\alpha) = 0.$$

Сформулированная теорема известна читателю (может быть в координатной формулировке) для того случая, когда $E_1 = \mathbf{R}^m$, $E_2 = \tilde{E} = \mathbf{R}^l$. Случай общих конечномерных пространств E_1, E_2 и $\tilde{E}$ может быть без труда сведен к указанному частному случаю; с другой стороны, доказательства, использующие специфику частного случая, могут быть без сколь-либо существенных изменений перенесены на общий случай. Ограничимся этими замечаниями и не будем обсуждать вопрос о доказательстве теоремы подробнее.

Возвратимся к описанию множества M. Применяя теорему о неявной функции, в качестве пространств E_1, E_2 следует взять $M_\mathbf{a}$, $N_\mathbf{a}$; размерности пространств $N_\mathbf{a}$ и $\tilde{E}$ равны. Отображение $\Phi : M_\mathbf{a} \times N_\mathbf{a} \to \tilde{E}$ следует положить равным

$$\Phi(\xi, \eta) = g(\mathbf{a} + \xi + \eta),$$

α, β и γ равны нулю. Пространство E рассматривается при этом как произведение $M_\mathbf{a} \times N_\mathbf{a}$. Соответствие $\mathbf{y} = \xi + \eta$ между $\mathbf{y} \in E$ и парами $(\xi, \eta) \in M_\mathbf{a} \times N_\mathbf{a}$ сохраняет векторные операции, но нормы в пространствах E и $M_\mathbf{a} \times N_\mathbf{a}$ не переходят, вообще говоря, друг в друга. Однако отображение $(\xi, \eta) \to \mathbf{y} = \xi + \eta$ удовлетворяет условию дистрибутивности и является ограниченным:

$$\|\mathbf{y}\| = \|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\| \leqslant \sqrt{2}\,(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2)^{1/2},$$

а следовательно, линейным и дифференцируемым. Поэтому из $g \in C^1$ следует $\Phi \in C^1$, а операторы $\Phi_\xi(\alpha, \beta)$ и $\Phi_\eta(\alpha, \beta)$ даются формулами

$$\Phi_\xi(0, 0) = g'(\mathbf{a})|_M = 0, \quad \Phi_\eta(0, 0) = g'(\mathbf{a})|_N = \nu.$$

Так как оператор ν не вырожден, то теорема показывает, что точку $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{a} = \xi + \eta$ можно погрузить в такой цилиндр $(\xi, \eta) \in U_1 \times U_2$, в котором уравнение $g(\mathbf{x}) = 0$ равносильно уравнению $\eta = \varphi(\xi)$, где $\varphi \in C^1(U_1 \to E_2)$, $\varphi(0) = 0$, а $\varphi'(0)$ удовлетворяет соотношению

$$g'(\mathbf{a})|_M + g'(\mathbf{a})|_N \varphi'(0) = 0,$$

из которого следует $\varphi'(0) = 0$.

Итак, точки множества M, находящиеся в цилиндре $U_1 \times U_2$, даются формулой $\mathbf{x} = \psi(\xi)$, где $\psi(\xi) = \mathbf{a} + \xi + \varphi(\xi)$.

Следствием теоремы о неявной функции является

Теорема (об обратной функции). *Пусть* $f \in C^1(E \to \tilde{E})$, *причем* E *и* $\tilde{E}$ — *конечномерные нормированные пространства одинаковой размерности. Если оператор* $f'(\mathbf{a})$ *не вырожден, то точка* $\mathbf{a}$ *обла-*

дает такой окрестностью U, что отображение f, ограниченное на U, обратимо. Множество значений отображения f, ограниченного на U, — открытое множество; обратное отображение принадлежит классу C^1.

Уточнение. В качестве U можно взять любую окрестность точки $\mathbf{a}$, на которой выполняется неравенство

$$\|f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{a})\| < \frac{1}{2}\|[f'(\mathbf{a})]^{-1}\|^{-1}, \quad \mathbf{x} \in U,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L(E \to \tilde{E})$ или в $L(\tilde{E} \to E)$.

Теорема об обратной функции следует из теоремы о неявной функции, если принять в условии второй из названных теорем $\Phi(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\xi} - f(\boldsymbol{\eta})$. Что касается уточнения, то оно легко может быть получено в рамках любого стандартного доказательства теоремы о неявной функции.

Если $E = \tilde{E} = \mathbf{R}^n$, то $f \in C^1(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда все координаты отображения f принадлежат C^1. Матрица отображения $f'(\mathbf{a}): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ является матрицей Якоби отображения f:

$$(f'(\mathbf{a})\,\mathbf{h})_i = \sum\nolimits_{j=1}^n f_{ix_j}(\mathbf{a})\, h_j.$$

Оператор $f'(\mathbf{a})$ невырожден тогда и только тогда, когда якобиан $\det\{f_{ix_j}(\mathbf{a})\}$ отличен от нуля.

38. Условный экстремум для функционалов на бесконечномерном пространстве. Построения п. 36 легко переносятся на тот случай, когда E — общее нормированное пространство, если только число условий, выделяющих M, остается *конечным*, т. е. если остается *конечномерным* $\tilde{E}$.

Пусть $I \in C^1(E)$ и $G \in C^1(E \to \tilde{E})$. Повторяя рассмотрения п. 36, введем множество $M = \{\mathbf{x} : G(\mathbf{x}) = 0\}$ и подпространство $M_\mathbf{a} = \{\boldsymbol{\xi} : G'(\mathbf{a})\,\boldsymbol{\xi} = 0\}$, $\mathbf{a} \in M$. По-прежнему будем называть $M_\mathbf{a}$ *касательным подпространством*, а его векторы — *касательными векторами*. Будем предполагать, как и раньше, что производная $G'(\mathbf{x}): E \to \tilde{E}$ во всех точках $\mathbf{x} \in M$ *невырождена*, т. е. множество значений $G'(\mathbf{x})$ совпадает с $\tilde{E}$.

1. *Если* $\mathbf{a}$ — *точка условного экстремума функционала I, то $I'(\mathbf{a})\,\boldsymbol{\xi} = 0$, где $\boldsymbol{\xi} \in M_\mathbf{a}$.*

2. *Если* $\mathbf{a}$ — *точка условного экстремума, то существует такая линейная функция $\lambda: \tilde{E} \to R$, что* $\mathbf{a}$ — *критическая точка функционала $I_\lambda = I + \lambda \circ G$.*

Докажем утверждения 1, 2. Пусть $\mathbf{f}_i$, $i = 1, \ldots, l$, — какой-либо базис в $\tilde{E}$. Векторы $\mathbf{e}_i \in E$, удовлетворяющие соотношениям $\mathbf{f}_i = G'(\mathbf{a})\,\mathbf{e}_i$ (согласно предположению о невырожденности $G'(\mathbf{a})$ они существуют), линейно-независимы. Обозначим через $N_\mathbf{a}$ натянутое на них подпространство в E размерности l. Пусть $M'_\mathbf{a}$ — какое-

либо конечномерное подпространство из M_a. Рассмотрим в E подпространство E', состоящее из векторов

$$\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\xi}\in M'_a, \ \boldsymbol{\eta}\in N_a.$$

Если $\mathbf{a}$ — точка условного экстремума функционала I, то 0 — точка экстремума функции $u: E'\to\mathbf{R}$, которая определяется соотношением $u(\mathbf{y})=I(\mathbf{a}+\mathbf{y})$, ограниченной на множество векторов, аннулирующих отображение $g: E'\to\tilde{E}$, которое определяется соотношением $g(\mathbf{y})=G(\mathbf{a}+\mathbf{y})$. С равным успехом вместо u можно рассматривать функцию $u_\lambda\,(u_\lambda(\mathbf{y})=I_\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{y}))$. В таком случае согласно утверждению 1) п. 36 $u'(0)\boldsymbol{\xi}=I'(\mathbf{a})\boldsymbol{\xi}=0$, где $\boldsymbol{\xi}\in M'_a$. Тот факт что подпространство M'_a может содержать любой касательный вектор $\boldsymbol{\xi}$, доказывает утверждение 1.

Вывод утверждения 2 требует дополнительных рассмотрений. Рассуждая так же, как в п. 36, получим

$$I'(\mathbf{a})|_N+\lambda G'(\mathbf{a})|_N=0,$$
$$I'(\mathbf{a})|_M+\lambda G'(\mathbf{a})|_M=0,$$

где $\lambda=-I'(\mathbf{a})|_N\nu^{-1}$, $\nu=G'(\mathbf{a})|_N$. Оператор ν по-прежнему обратим, так как его область определения — l-мерное пространство и множество значений также l-мерно. Обратный оператор удовлетворяет условию дистрибутивности, а значит, в силу конечномерности $\tilde{E}$ — условию ограниченности. Если всякий вектор $\mathbf{y}\in E$ может быть представлен в виде суммы $\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\xi}\in M_a$, $\boldsymbol{\eta}\in N_a$, то из двух полученных равенств будет следовать утверждение 2

$$I'(\mathbf{a})+\lambda G'(\mathbf{a})=0.$$

Докажем, что разложение

$$\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$$

возможно. Разложение $\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ равносильно тому, что для каждого $\mathbf{y}\in E$ найдется такое $\boldsymbol{\eta}\in N_a$, что $G'(\mathbf{a})(\mathbf{y}-\boldsymbol{\eta})=0$. Полученное уравнение можно преобразовать к следующему виду: $G'(\mathbf{a})\boldsymbol{\eta}=G'(\mathbf{a})\mathbf{y}$ или $\nu\boldsymbol{\eta}=G'(\mathbf{a})\mathbf{y}$. Так как оператор ν обратим, уравнение разрешимо. Отсюда следует, что разложение $\mathbf{y}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ возможно. Отметим, кроме того, что оно однозначно, а в силу непрерывности оператора $\nu^{-1}G'(\mathbf{a})$ вектор $\boldsymbol{\eta}$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{\xi}$ — непрерывные функции вектора $\mathbf{y}$.

39. Изопериметрическая задача. *Изопериметрическая задача* — задача на условный экстремум для интегральных функционалов. В ней фигурируют интегральные функционалы

$$I(\mathbf{f})=\int_\Delta L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')\,dt,\quad G_i(\mathbf{f})=\int_\Delta M_i(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')\,dt$$

на пространстве $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$; индекс i принимает значения $1,\ldots,l$. Множество M характеризуется условиями $G_i(\mathbf{f})=0$, $i=1,\ldots,l$. Ищутся точки экстремума функционала I, ограниченного на M. Введем отображение $\mathbf{G}: C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^l$, действую-

щее по формуле $\mathbf{G}(\mathbf{f}) = (G_1(\mathbf{f}), \ldots, G_l(\mathbf{f}))$. Тогда M может быть описано как множество, аннулирующее отображение $\mathbf{G}$. Предположим, что I и $G_i \in \Omega^2$ (при этом I и $G_i \in C^1$), а отображение $\mathbf{G}$ не вырождено. При этих условиях справедливо правило множителей — утверждение *2* п. 38. Так как $\tilde{E} = \mathbf{R}^l$, то линейную функцию $\lambda: \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ можно задать вектором $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{R}^l : \lambda(\mathbf{z}) = (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{z}) = \sum_i \lambda_i z_i$. Поэтому функционал I_λ имеет вид

$$I_\lambda(\mathbf{f}) = I(\mathbf{f}) + (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{G}(\mathbf{f})) = \int_\Delta L_\lambda(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt,$$

где

$$L_\lambda(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i M_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Следовательно, I_λ — интегральный функционал. *Правило множителей означает, что точка экстремума* $\mathbf{f}$ *в изопериметрической задаче — критическая точка функционала* I_λ *при некотором выборе* $\boldsymbol{\lambda}$. Согласно теореме 1 п. 8 *это равносильно при дополнительном предположении* $I_\lambda \in \Omega^2_{\text{reg}}$ *тому, что*: 1) $\mathbf{f} \in C^2$, 2) *выполняется уравнение Эйлера* $L_\lambda[\mathbf{f}] = 0$, 3) *выполняются естественные граничные условия* $p_\lambda[\mathbf{f}](t)|_{a,b} = 0$, *где* $p_\lambda[\mathbf{f}](t) = \nabla_v L_\lambda(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$.

Таким образом, точки экстремума следует искать среди функций $\mathbf{f}$, которые удовлетворяют условиям 1) — 3) и уравнению $\mathbf{G}(\mathbf{f}) = 0$. Уравнение, граничные условиям 3) и соотношение $\mathbf{G}(\mathbf{f}) = 0$ согласованы по числу параметров. В самом деле, решение уравнения Эйлера зависит от $2n$ произвольных постоянных и l параметров λ_i; граничные условия и соотношение $\mathbf{G}(\mathbf{f}) = 0$ дают $2n + l$ скалярных равенств для их отыскания.

Если ввести отображение $\tilde{I}: C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^l$, определив его формулой

$$\tilde{I}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}) = I(\mathbf{f}) + (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{G}(\mathbf{f})),$$

то уравнения для его критической точки

$$I'(\mathbf{f}) + (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{G}'(\mathbf{f})) = 0, \quad \mathbf{G}(\mathbf{f}) = 0$$

совпадают с построенными выше уравнениями для точки экстремума и вектора $\boldsymbol{\lambda}$.

Можно было бы рассмотреть изопериметрическую задачу, ограничив дополнительно множество функций $\mathbf{f}$ условием

$$\mathbf{f}(a) = \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{f}(b) = \boldsymbol{\eta}.$$

Несложно убедиться, что в этом случае решение изопериметрической задачи $\mathbf{f}$ по-прежнему должно удовлетворять уравнению Эйлера $L_\lambda[\mathbf{f}] = 0$, соотношению $\mathbf{G}(\mathbf{f}) = 0$ и *заданным граничным условиям* $\mathbf{f}(a) = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{f}(b) = \boldsymbol{\eta}$ вместо естественных граничных условий.

Примеры.

1) Нижеследующая задача относится к числу простейших изопериметрических задач, которым этот тип задач обязан своим названием. Требуется найти кривую — график положительной функции $f: \Delta \to \mathbf{R}$, $f \geqslant 0$, одна граничная точка которой задана $f(a) = 0$, а другая свободна, так, чтобы при фиксированной длине l, $l > |\Delta|$, площадь, ограниченная этой кривой, осью абсцисс

и прямой $t=b$, была наибольшей. Иными словами, требуется найти максимум функционала

$$I(f)=\int_\Delta f(t)\,dt$$

при условиях $\int_\Delta (1+f'^2)^{1/2}\,dt=l$, $f(a)=0$. Функция f должна удовлетворять уравнению Эйлера $L_\lambda[f]=0$, $L_\lambda(t, x, v)=x+\lambda(1+v^2)^{1/2}$, и граничным условиям $f(a)=0$, $L_{\lambda v}(b, f(b), f'(b))=0 \Longleftrightarrow \lambda f'(b)=0$. Легко видеть, что графики экстремалей — дуги окружностей

$$(t-d)^2+(x-c)^2=\lambda^2.$$

Граничное условие в точке b дает $d=b$; граничное условие в точке a устанавливает связь между параметрами

$$\lambda^2=(b-a)^2+c^2$$

(рис. 16). Угол ω можно найти из уравнения $\frac{\omega}{l}=\frac{\sin\omega}{|\Delta|}$, которое имеет единственное решение при условии $l>|\Delta|$. По ω вычисляется последний неопределенный параметр c. Построенная кривая, дуга окружности, является графиком функции только при условии $2l<\pi|\Delta|$.

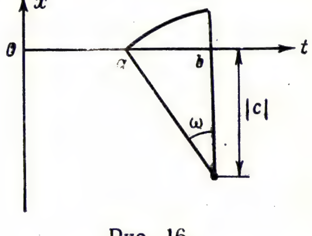


Рис. 16.

2) Положение равновесия тяжелой нити заданной длины l с закрепленными граничными точками (a, ξ) и (b, η) дается решением изопериметрической задачи

$$I(f)=\int_\Delta f(1+f'^2)^{1/2}\,dt,\ G(f)=\int_\Delta\left[(1+f'^2)^{1/2}-\frac{l}{|\Delta|}\right]dt,\ f(a)=\xi,\quad f(b)=\eta.$$

В этом случае $L_\lambda(t, x, v)=(x+\lambda)(1+v^2)^{1/2}$, так что графики экстремалей функционала I_λ — отрезки цепных линий

$$f(t)+\lambda=c\,\mathrm{ch}\frac{t-d}{c}.$$

Можно показать, что существует (если, конечно, $[|\Delta|^2+(\xi-\eta)^2]^{1/2}<l$) единственная экстремаль, удовлетворяющая условиям $G(f)=0$, $f(a)=\xi$, $f(b)=\eta$.

40. Задача Лагранжа. *Задача Лагранжа состоит в отыскании точек экстремума интегрального функционала I, ограниченного на множество M в пространстве $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, образованное функциями* $\mathbf{f}$, *которые удовлетворяют соотношению*

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{f}(f), \mathbf{f}'(t))=0;$$

в этом соотношении $\mathbf{F}$ *— заданная вектор-функция* $\Delta\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^l$, $l<n$. Функцию $\mathbf{F}$ и ее компоненты принято называть *связями*, *связью* называют также само соотношение $\mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))=0$. Связь далее называют *голономной*, если функция $\mathbf{F}$ не зависит от последнего аргумента: $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})=\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$. Если нужно подчеркнуть, что связь не является голономной, ее называют *неголономной*. Отображение $\mathbf{G}$, характеризующее множество M, задано на пространстве $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ и принимает значения во множестве вектор-функций $\Delta\to\mathbf{R}^l$; оно дается формулой

$$(G(f))(t)=\mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)).$$

В общем случае значения отображения G удобно помещать в пространство $C(\Delta \to \mathbf{R}^l)$; в случае голономных связей, когда

$$(G(\mathbf{f}))(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t)),$$

удобно помещать значения отображения G в пространство $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^l)$. На этот раз и пространство E, на котором задаются отображения I и G, и пространство $\tilde{E}$, в котором лежат значения G, бесконечномерны. Редуцировать случай бесконечномерного $\tilde{E}$ к конечномерному наподобие того, как это было сделано с пространством E, невозможно. Тем не менее оба необходимых условия, полученных для конечномерного $\tilde{E}$, можно при определенных дополнительных оговорках обобщить на случай бесконечномерного $\tilde{E}$. Мы не будем, однако, развивать соответствующую абстрактную схему, так как это существенно вывело бы нас за рамки вариационного исчисления. Вместо абстрактной схемы мы используем специфику отображения G в задаче Лагранжа.

Опыт, накопленный в предыдущих задачах, заставляет ожидать, что при определенных предположениях справедливы следующие утверждения:

1) *если* $\mathbf{f}$ *— точка экстремума в задаче Лагранжа, то* $I'(\mathbf{f})\xi = 0$, *где* ξ *— вектор касательного подпространства* $M_{\mathbf{f}}$;

2) *если* $\mathbf{f}$ *— точка экстремума в задаче Лагранжа, то существует такой линейный функционал* $\Lambda : \tilde{E} \to \mathbf{R}$, *что* $\mathbf{f}$ *— критическая точка функционала* $I_\Lambda = I + \Lambda \circ G$.

Эти утверждения действительно верны, если $I \in \Omega^2$ (следовательно, $I \in C^1$), а $\mathbf{F} \in C^2(\Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l)$ и удовлетворяет некоторым *условиям невырожденности*, которые следует сформулировать отдельно для голономных и неголономных связей. Для голономных связей требуется, чтобы оператор $\mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$ был невырожден при всех $(t, \mathbf{x})$; для неголономных связей требуется, чтобы был невырожден при всех $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ оператор $\mathbf{F}_\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$. Для голономных связей вместо $\mathbf{F} \in C^2$ достаточно считать $\mathbf{F} \in C^1$. Если $\mathbf{F} \in C^2$, то и $G \in C^2$, при этом

$$(G'(\mathbf{f})\mathbf{h})(t) = \mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\mathbf{h}(t) + \mathbf{F}_\mathbf{v}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\mathbf{h}'(t).$$

Касательное пространство $M_\mathbf{f}$ характеризуется уравнением

$$G'(\mathbf{f})\xi = 0.$$

Правило множителей 2) выглядит неэффективно, ибо в нем фигурирует линейный функционал Λ, о конкретном строении которого ничего не сказано. Фактически, однако, если $\mathbf{f} \in C^2$, то функционал Λ в задаче Лагранжа оказывается *интегральным функционалом*. При известных оговорках линейный интегральный функционал на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^l)$ может быть, как известно, с помощью интегрирования по частям приведен к виду

$$\Lambda(\mathbf{h}) = \int_\Delta (\lambda(t), \mathbf{h}(t))\,dt + (\lambda_b, \mathbf{h}(b)) - (\lambda_a, \mathbf{h}(a)),$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — некоторая функция из $C(\Delta \to \mathbf{R}^l)$, а $\boldsymbol{\lambda}_a$ и $\boldsymbol{\lambda}_b \in \mathbf{R}^l$. Так записанный функционал Λ является линейным функционалом также на пространстве $C(\Delta \to \mathbf{R}^l)$. Ограниченность, которую следует проверить, чтобы установить этот факт, почти очевидна:

$$|\Lambda(\mathbf{h})| \leqslant \|\boldsymbol{\lambda}\|_c \|\mathbf{h}\|_c |\Delta| + \|\boldsymbol{\lambda}_b\| \|\mathbf{h}(b)\| + \|\boldsymbol{\lambda}_a\| \|\mathbf{h}(a)\| \leqslant$$
$$\leqslant (|\Delta| \|\boldsymbol{\lambda}\|_c + \|\boldsymbol{\lambda}_a\| + \|\boldsymbol{\lambda}_b\|) \|\mathbf{h}\|_c.$$

Функционал Λ может быть взят при $\mathbf{f} \in C^2$ в предложенном виде и для голономных и для неголономных связей.

Если функционал Λ — интегральный, то функционал I_Λ имеет вид

$$I_\Lambda(\mathbf{f}) = \int_\Delta L_\Lambda(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt +$$
$$+ (\boldsymbol{\lambda}_b, \mathbf{F}(b, \mathbf{f}(b), \mathbf{f}'(b))) - (\boldsymbol{\lambda}_a, \mathbf{F}(a, \mathbf{f}(a), \mathbf{f}'(a))),$$

при этом

$$L_\Lambda(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

Функционал I_Λ дифференцируем, его производная дается формулой

$$I'(\mathbf{f})\mathbf{h} = \int_\Lambda dL_\Lambda(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); 0, \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))\, dt +$$
$$+ (\boldsymbol{\lambda}_b, d\mathbf{F}(b, \mathbf{f}(b), \mathbf{f}'(b); 0, \mathbf{h}(b), \mathbf{h}'(b)) -$$
$$- (\boldsymbol{\lambda}_a, d\mathbf{F}(a, \mathbf{f}(a), \mathbf{f}'(a); 0, \mathbf{h}(a), \mathbf{h}'(a)).$$

Предполагая, что $\mathbf{f} \in C^2$, можно преобразовать производную с помощью интегрирования по частям:

$$I'_\Lambda(\mathbf{f})\mathbf{h} = \int_\Delta (L_\Lambda[\mathbf{f}](t), \mathbf{h}(t))\, dt +$$
$$+ (p_\Lambda[\mathbf{f}], \mathbf{h})|_\Delta + (\boldsymbol{\lambda}_t, d\mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); 0, \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))|_\Delta.$$

Здесь положено $p_\Lambda[\mathbf{f}](t) = \nabla_\mathbf{v} L_\Lambda(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$. В точке экстремума $I'(\mathbf{f})\mathbf{h} = 0$ при $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Если $\mathbf{h} \in C_0^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то

$$I'(\mathbf{f})\mathbf{h} = \int_\Delta (L_\Lambda[\mathbf{f}](t), \mathbf{h}(t))\, dt = 0.$$

В силу леммы 2 п. 7, отсюда следует уравнение Эйлера

$$L_\Lambda[\mathbf{f}](t) = \nabla_\mathbf{x} L_\Lambda(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \frac{d}{dt} \nabla_\mathbf{v} L_\Lambda(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 0.$$

Благодаря уравнению Эйлера при всех $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$

$$I'(\mathbf{f})\mathbf{h} = (p_\Lambda[\mathbf{f}], \mathbf{h})|_\Delta + (\boldsymbol{\lambda}_t, d\mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t); 0, \mathbf{h}(t), \mathbf{h}'(t))|_\Delta.$$

Ввиду произвольности $\mathbf{h}(a)$, $\mathbf{h}'(a)$, $\mathbf{h}(b)$ и $\mathbf{h}'(b)$ приходим к граничным условиям

$$p_\Lambda[\mathbf{f}] + (\mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'))^* \boldsymbol{\lambda}_t|_{a,b} = 0,$$
$$(\mathbf{F}_\mathbf{v}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'))^* \boldsymbol{\lambda}_t|_{a,b} = 0.$$

Здесь $(\mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))^*$ — оператор $\mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^n$, сопряженный к оператору $\mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$; его матрица имеет вид

$$\{(\mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))^*_{ij}\} = \{F_{jx_i}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\}.$$

Аналогично определяется $(\mathbf{F_v}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}))^*$.

Характер уравнения и вид граничных условий зависят от связей. В случае голономных связей уравнение Эйлера не содержит производной λ', а граничные условия сводятся к соотношениям

$$p_\Lambda[\mathbf{f}] + (\mathbf{F_x}(t,\ \mathbf{f}))^* \lambda_t |_{a,b} = 0.$$

Если связи неголономны, уравнение Эйлера содержит производную λ', а граничные условия превращаются в естественные граничные условия

$$p_\Lambda[\mathbf{f}]|_{a,b} = 0.$$

Это связано с тем, что в силу невырожденности оператора $\mathbf{F_v}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$ уравнение $(\mathbf{F_v}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}))^*\mathbf{h} = 0$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^l$, выполняется только при $\mathbf{h} = 0$. Последнее замечание показывает, что в неголономном случае можно с самого начала брать функционал Λ в виде

$$\Lambda(\mathbf{h}) = \int_\Delta (\lambda(t),\ \mathbf{h}(t))\,dt.$$

В предыдущих вычислениях имеется некоторый пропуск. Для того чтобы привести $I'_\Lambda(\mathbf{f})$ к проинтегрированной форме в случае неголономной связи, следует предполагать, что $\lambda \in C^1$. Это условие действительно выполнено, если $\mathbf{f} \in C^2$. Напомним еще раз, что условие $\mathbf{f} \in C^2$ считалось выполненным и при описании вида функционала Λ и в дальнейшем при переходе к проинтегрированной форме производной $I'(\mathbf{f})$. В отличие от рассмотренных ранее вариационных задач мы не будем выяснять условия, при которых точка экстремума $\mathbf{f}$ обязательно принадлежит C^2.

В типичном случае краевая задача и условия связи однозначно определяют вектор-функцию $\mathbf{f}$ и функционал Λ. Если связь голономна, ее можно использовать для исключения l координат функции $\mathbf{f}$ из n. Уравнения Эйлера превращаются при этом в n уравнений для оставшихся $n-l$ координат функции $\mathbf{f}$ и для l координат функции λ. Эти уравнения относительно координат функции $\mathbf{f}$ являются дифференциальными уравнениями второго порядка, поэтому их решения содержат $2n-2l$ произвольных постоянных. $2n-2l$ этих постоянных и $2l$ координат векторов λ_a, λ_b можно найти из $2n$ граничных условий. Приведенный счет параметров показывает, что условия связи $\mathbf{F}(t,\ \mathbf{f}(t)) = 0$ можно дополнить еще $2n-2l$ дополнительными ограничениями на векторы $\mathbf{f}(a)$ и $\mathbf{f}(b)$. Ставя задачу с заданными граничными точками, нужно побеспокоиться о том, чтобы эти точки удовлетворяли условиям связи. Если связь неголономна, то уравнения связи можно использовать как l дифференциальных уравнений, чтобы выразить l компонент функции $\mathbf{f}$ через другие. Эти выражения будут содержать l произвольных постоянных. Уравнения Эйлера добавят на этот раз не $2n-2l$ постоянных, а $2n-l$ постоянных, так как относительно l координат функции λ они также будут дифференциальными уравнениями первого порядка. В итоге возникнет $2n$

произвольных постоянных, которые должны быть определены из $2n$ граничных условий. В общем случае неголономную связь можно дополнить еще $2n$ условиями на векторы $\mathbf{f}(a)$ и $\mathbf{f}(b)$. Например, в случае неголономной связи можно рассмотреть задачу с заданными граничными точками.

Уравнение Эйлера, граничные условия и уравнения связи эквивалентны тому, что совокупность вектор-функций $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и векторов $\boldsymbol{\lambda}_a$, $\boldsymbol{\lambda}_b$ является критической точкой отображения $\tilde{I}(\mathbf{f}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}_a, \boldsymbol{\lambda}_b) = I_\Lambda(\mathbf{f})$.

41. Голономные связи. Докажем правило множителей и установим вид функционала Λ, предполагая связь голономной. Некоторые несложные обоснования ради краткости будут опущены. Голономная связь допускает простую геометрическую интерпретацию: соотношение $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = 0$ определяет в $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n+1-l)$-мерную поверхность; вектор-функции $\mathbf{f}$, графики которых лежат на этой поверхности, как раз и составляют множество M. При фиксированном $t \in \Delta$ соотношение $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = 0$ определяет $(n-l)$-мерную поверхность M_t в $\mathbf{R}^n$. Пусть $M_{t,\mathbf{a}}$ — $(n-l)$-мерное подпространство в $\mathbf{R}^n$, касательное к M_t в точке $\mathbf{a} \in M_t \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $N_{t,\mathbf{a}} = M_{t,\mathbf{a}}^{\perp}$ — l-мерное подпространство в $\mathbf{R}^n$, ортогональное к $M_{t,\mathbf{a}}$. Произвольный вектор $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ допускает разложение $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$, где $\boldsymbol{\xi} \in M_{t,\mathbf{a}}$, $\boldsymbol{\eta} \in N_{t,\mathbf{a}}$. Вектор-функции $\boldsymbol{\xi} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{\xi}(t) \in M_{t,\mathbf{f}(t)}$, составляют подпространство $M_\mathbf{f}$. Подпространство, образованное вектор-функциями $\boldsymbol{\eta} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, удовлетворяющими условию $\boldsymbol{\eta}(t) \in N_{t,\mathbf{f}(t)}$, обозначим $N_\mathbf{f}$. Если $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, то имеет место разложение $\mathbf{h}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{\eta}(t)$, $\boldsymbol{\xi}(t) \in M_{t,\mathbf{f}(t)}$, $\boldsymbol{\eta}(t) \in N_{t,\mathbf{f}(t)}$. Ему соответствует разложение

$$\mathbf{h} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\xi} \in M_\mathbf{f}, \quad \boldsymbol{\eta} \in N_\mathbf{f}.$$

Вновь обратимся к рассмотрению поверхности M_t. В некоторой окрестности U_t нуля на $M_{t,\mathbf{a}}$ определено такое непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi_{t,\mathbf{a}}\colon U_t \to N_{t,\mathbf{a}}$, что точки $\mathbf{a} + \boldsymbol{\xi} + \varphi_{t,\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi})$ лежат на M_t. Отображение $\varphi_{t,\mathbf{a}}$ обладает следующими свойствами: $\varphi_{t,\mathbf{a}}(0) = 0$, $\varphi'_{t,\mathbf{a}}(0) = 0$ (штрих — знак производной по аргументу отображения $\varphi_{t,\mathbf{a}}$) порождают отображение $\Phi\colon U \subset M_\mathbf{f} \to N_\mathbf{f}$:

$$(\Phi(\boldsymbol{\xi}))(t) = \varphi_{t,\mathbf{f}(t)}(\boldsymbol{\xi}(t)).$$

Отображение Φ принадлежит C^1 и обладает следующими свойствами: $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0)(t) = \varphi'_{t,\mathbf{f}(t)}(0) = 0$. Значения функции вида $\mathbf{g} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f} + \boldsymbol{\xi} + \Phi(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in U$, лежат на множестве M. Множество U можно определить следующим образом:

$$U = \{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}(t) \in U_{t,\mathbf{f}(t)}\}.$$

Оказывается, радиусы окрестностей $U_{t,\mathbf{f}(t)}$ можно подобрать так, что их точная нижняя граница на Δ положительна. Это означает, что множество U содержит некоторую окрестность в пространстве $M_\mathbf{f}$.

Если функция $\mathbf{f}$ является точкой экстремума в задаче Лагранжа, то 0 — точка безусловного экстремума функционала $v = I \circ \boldsymbol{\psi}\colon U \to \mathbf{R}$. Поэтому $v'(0) = 0$ и, следовательно,

$$I'(\mathbf{f})\,\boldsymbol{\xi} = 0, \quad \text{где } \boldsymbol{\xi} \in M_\mathbf{f}.$$

Чтобы вывести отсюда правило множителей, следует доказать, что существует такой линейный функционал Λ на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^l)$, что выполняется соотношение

$$I'(\mathbf{f})|_N + \Lambda G'(\mathbf{f})|_N = 0.$$

Вместе с очевидным соотношением

$$I'(\mathbf{f})|_M + \Lambda G'(\mathbf{f})|_M = 0$$

это приводит к правилу множителей.

Положим $\mathbf{v} = G'(\mathbf{f})|_N$. Убедимся, что линейный оператор $\mathbf{v}$ обратим и обратный оператор $\mathbf{v}^{-1}$ ограничен. После этого можно положить

$$\Lambda = I'(\mathbf{f})|_N \mathbf{v}^{-1} = I'(\mathbf{f})\mathbf{v}^{-1}.$$

Оператор $\mathbf{v}$ действует по формуле

$$(\mathbf{v}\boldsymbol{\eta})(t) = \mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}\boldsymbol{\eta}(t),$$

где $\mathbf{v}_{t,\,\mathbf{a}} = \mathbf{F}_\mathbf{x}(t,\ \mathbf{a})|_N$. Оператор $\mathbf{v}_{t,\,\mathbf{a}}$ обратим, обозначим обратный $\mathbf{v}_{t,\,\mathbf{a}}^{-1}$. Вектор-функция $\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}^{-1}\mathbf{k}(t) \in N_{t,\,\mathbf{f}(t)}$ принадлежит $N_\mathbf{f}$, если $\mathbf{k} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^l)$. Таким образом, $(\mathbf{v}^{-1}\mathbf{k})(t) = \mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}^{-1}\mathbf{k}(t)$. Из этой формулы нетрудно вывести и ограниченность оператора $\mathbf{v}^{-1}$. Найдем вид функционала Λ. Производная $I'(\mathbf{f})$ — интегральный функционал вида

$$I'(\mathbf{f})\boldsymbol{\eta} = \int_\Delta \left[(\mathbf{g}_0(t),\ \boldsymbol{\eta}(t))_{\mathbf{R}^n} + (\mathbf{g}_1(t),\ \boldsymbol{\eta}'(t))_{\mathbf{R}^n} \right] dt.$$

Если $\mathbf{f} \in C^2$, то $\mathbf{g}_1 \in C^1$ и функционал $I'(\mathbf{f})$ можно преобразовать с помощью интегрирования по частям:

$$I'(\mathbf{f})\boldsymbol{\eta} = \int_\Delta (\mathbf{g}(t),\ \boldsymbol{\eta}(t))\,dt + (\mathbf{g}_1,\ \boldsymbol{\eta})|_\Delta.$$

Отсюда

$$\Lambda(\mathbf{k}) = I'(\mathbf{f})\,\mathbf{v}^{-1}\mathbf{k} = \int_\Delta (\mathbf{g}(t),\ \mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}^{-1}\mathbf{k}(t))\,dt + (\mathbf{g}_1(t),\ \mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}^{-1}\mathbf{k}(t))|_\Delta.$$

Положим $(\mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}^{-1})^*\,\mathbf{g}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t)$ и $\boldsymbol{\lambda}_t = (\mathbf{v}_{t,\,\mathbf{f}(t)}^{-1})^*\mathbf{g}_1(t)$, тогда

$$\Lambda(\mathbf{k}) = \int_\Delta (\boldsymbol{\lambda}(t),\ \mathbf{k}(t))\,dt + (\boldsymbol{\lambda}_t,\ \mathbf{k}(t))|_\Delta,$$

что и было объявлено в п. 41.

42. Неголономные связи. Обращаясь к неголономным связям, вновь ради краткости будем опускать технические детали. На этот раз связи представляют собою систему дифференциальных уравнений

$$\mathbf{F}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)) = 0,$$

но число уравнений, равное l, меньше числа функций $l < n$. Подпространство $M_\mathbf{f}$ состоит из решений *уравнения в вариациях*

$$\mathbf{F}_\mathbf{x}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{F}_\mathbf{v}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,\boldsymbol{\xi}'(t) = 0;$$

оно является *линейным однородным* уравнением. Рассмотрим *неоднородное уравнение*

$$\mathbf{F}_\mathbf{x}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,\mathbf{h}(t) + \mathbf{F}_\mathbf{v}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,\mathbf{h}'(t) = \mathbf{k}(t),$$

в котором $\mathbf{k} \in C(\Delta \to \mathbf{R}^l)$ — заданная функция. Решение этого уравнения определено с точностью до слагаемого $\boldsymbol{\xi}$, принадлежащего $M_\mathbf{f}$. *Построить подпространство* $N_\mathbf{f}$ *— это значит по существу указать какой-либо способ выбора единственного решения неоднородного уравнения, при котором решение линейно зависит от свободного члена* $\mathbf{k}$.

Отвечающее этому способу множество решений η неоднородного уравнения и образует подпространство N_f. Ясно, что общее решение допускает разложение

$$h = \xi + \eta, \quad \xi \in M_f, \quad \eta \in N_f.$$

Если бы число уравнений l было равно числу функций n, то подпространство N_f можно было бы фиксировать с помощью данных Коши $\eta(a) = 0$. Так как $l < n$, данных Коши недостаточно.

Введем в R^n $(n-l)$-мерное подпространство $M_{t,x,v}$, образованное векторами, удовлетворяющими условию

$$F_v(t, x, v)\,\xi = 0.$$

Наряду с ним рассмотрим в R^n l-мерное ортогональное подпространство $N_{t,x,v} = M^{\perp}_{t,x,v}$. Определим N_f как подмножество в $C^1(\Delta \to R^n)$, состоящее из функций η, удовлетворяющих двум условиям: $\eta'(t) \in N_{t, f(t), f'(t)}$ и $\eta(a) = 0$. Формула

$$\eta(t) = \int_a^t \eta'(\tau)\,d\tau$$

показывает, что множество N_f — подпространство в $C^1(\Delta \to R^n)$. Убедимся в том, что неоднородное линейное уравнение при произвольном $k \in C(\Delta \to R^l)$ имеет единственное решение η, принадлежащее N_f. Введем оператор $\nu_{t,x,v} = F_v(t, x, v)|_{N_{t,x,v}}$, в силу предположения о невырожденности $F_v(t, x, v)$ он обратим. Предполагая, что $\eta \in N_f$, приведем уравнение для η к виду

$$\eta'(t) = A(t)\,\eta(t) + b(t),$$

где

$$A(t) = -\nu^{-1}_{t, f(t), f'(t)} F_x(t, f(t), f'(t)), \quad b(t) = \nu^{-1}_{t, f(t), f'(t)} k(t).$$

Линейный оператор $A(t)$: $R^n \to R^n$ и вектор $b(t) \in R^n$ непрерывно зависят от $t \in \Delta$. Полученное уравнение можно рассматривать как уравнение для вектор-функций $\Delta \to R^n$, опуская условие $\eta'(t) \in N_{t, f(t), f'(t)}$, ибо $A(t)\,\eta(t) + b(t)$, а следовательно, и η' автоматически принадлежат $N_{t, f(t), f'(t)}$. Дополняя уравнение данными Коши $\eta(a) = 0$, можно утверждать, что линейное неоднородное уравнение имеет единственное решение, принадлежащее N_f.

Найдем теперь вид функционала Λ на $C(\Delta \to R^l)$, удовлетворяющего соотношению

$$I'(f)|_N + \Lambda G'(f)|_N = 0,$$

в котором I — заданный интегральный функционал. Оператор ν^{-1}, $\nu = G'(f)|_N$, сопоставляет свободному члену k решение $\eta \in N_f$ неоднородного линейного уравнения. Уравнение было приведено к виду $\eta' = A\eta + b$. Решение η задачи Коши с условием $\eta(a) = 0$ можно, как известно, получить с помощью *метода вариации произвольных постоянных*. При этом окажется, что

$$\eta(t) = \int_a^t K(t, \tau)\, b(\tau)\,d\tau,$$

где $K(t, \tau)$ — линейный оператор в R^n, причем элементы его матрицы — непрерывно дифференцируемые функции пары (t, τ) (см. Приложение 1). Производная $I'(f)$ — линейный интегральный функционал

$$I'(f)\,h = \int_\Delta [(g_0(t), h(t)) + (g_1(t), h'(t))]\,dt,$$

если $f \in C^2$, то $g_1 \in C^1$. Преобразуем функционал $I'(f)$:

$$I'(f)\,h = \int_\Delta (g(t), h'(t))\,dt + \left(\int_b^t g_0(\tau)\,d\tau,\ h(t)\right)\Big|_\Delta;$$

здесь $g(t)=g_1(t)-\int_b^t g_0(\tau)\,d\tau\in C^1$. Если $h(a)=0$, то внеинтегральные члены исчезают:

$$I'(f)=\int_\Delta (g(t),\ h'(t))\,dt.$$

Функционал Λ дается формулой

$$\Lambda(k)=I'(f)|_N\,\nu^{-1}k=I'(f)\,\nu^{-1}k=I'(f)\,\eta=$$
$$=\int_\Delta (g(t),\ \eta'(t))\,dt=\int_\Delta (g(t),\ A(t)\,\eta(t)+b(t))\,dt.$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\int_\Delta (g(t),\ A(t)\,\eta(t))\,dt=\int_\Delta (A^*(t)\,g(t),\ \eta(t))\,dt=$$
$$=\int_\Delta \left(A^*(t)\,g(t),\ \int_a^t K(t,\ \tau)\,b(\tau)\,d\tau\right)dt=\int_\Delta d\tau\int_\tau^b (A^*(t)\,g(t),\ K(t,\ \tau)\,b(\tau))\,dt=$$
$$=\int_\Delta dt\int_t^b (K^*(\tau,\ t)\,A^*(\tau)\,g(\tau),\ b(t))\,d\tau=\int_\Delta dt\,\left(\int_t^b K^*(\tau,\ t)\,A^*(\tau)\,g(\tau)\,d\tau,\ b(t)\right).$$

Положим

$$\mu(t)=\int_t^b K^*(\tau,\ t)\,A^*(\tau)\,g(\tau)\,d\tau+g(t);$$

нетрудно видеть, что $\mu\in C^1$. В терминах μ

$$\Lambda(k)=\int_\Delta (\mu(t),\ b(t))\,dt.$$

Выразим b через k:

$$\Lambda(k)=\int_\Delta (\lambda(t),\ k(t))\,dt,$$

здесь

$$\lambda(t)=(\nu^{-1}_{t,\,f(t),\,f'(t)})^*\,\mu(t).$$

Так как $\mu\in C^1$ и оператор $(\nu^{-1}_{t,\,f(t),\,f'(t)})^*$ благодаря $F\in C^2$ и $f\in C^2$ также непрерывно дифференцируем по t, то $\lambda\in C^1(\Delta\to R^l)$. Таким образом, мы подтвердили вид функционала Λ, объявленный в п. 40.

Для того чтобы получить правило множителей, остается доказать, что $I'(f)\,\xi=0$ при $\xi\in M_f$. Чтобы достичь этого, достаточно решить нелинейное уравнение

$$F(t,\ f(t)+\xi(t)+\eta(t),\ f'(t)+\xi'(t)+\eta'(t))=0$$

относительно функции $\eta\in N_f$, считая $f\in M$, а $\xi\in M_f$ и достаточно малым, и убедиться далее, что возникающее при этом отображение $\eta=\Phi(\xi)$ обладает обычными свойствами: $\Phi\in C^1$, $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=0$. Благодаря невырожденности оператора $F_v(t,\ x,\ v)$ нелинейное уравнение можно решить при каждом t относительно $\eta'(t)$; решение будет единственным. если искать его в подпространстве $N_{t,\,f(t),\,f'(t)}$:

$$\eta'(t)=H(t,\ f(t)+\xi(t)+\eta(t),\ f'(t)+\xi'(t)).$$

Полученную систему можно рассматривать, игнорируя условие $\eta'(t)\in\in N_{t,\,f(t),\,f'(t)}$, ибо оно выполняется автоматически. Решение задачи Коши с условием $\eta(a)=0$ (если оно существует) единственно и принадлежит N_f. При $\xi=0$ имеется решение $\eta=0$, при достаточно малых ξ решение также существует. На доказательстве последнего факта мы не станем останавливаться. Анализируя решение, можно доказать, что оно действительно порождает отображение Φ с необходимыми свойствами. Этими замеч ниями закончим изучение неголономных связей.

43. Принцип максимума. Исследование точек экстремума функционала

$$I(f)=\int_\Delta L(t,\ f(t),\ f'(t))\,dt$$

на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ равносильно исследованию точек экстремума функционала

$$I_1(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))\, dt$$

на множестве M пар $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ вектор-функций $\mathbf{f} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{g} \in C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, подчиненных невырожденной связи

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}'(t).$$

Отметим, что множество M в данном случае — *векторное подпространство* в пространстве пар $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

Согласно построениям предыдущего пункта точка экстремума $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ функционала I_1 на множестве M является стационарной точкой функционала

$$I_\Lambda(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_\Delta \left[L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) + (\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{f}'(t) - \mathbf{g}(t))_{\mathbf{R}^n}\right] dt,$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ — некоторая функция из $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Если стационарная точка $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ такова, что $\mathbf{f} \in C^2$ и $\mathbf{g} \in C^1$ *, то пара $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала I_Λ, которое в данном случае содержит два векторных уравнения:

$$\nabla_\mathbf{x} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}) - \boldsymbol{\lambda}'(t) = 0,$$

$$\nabla_\mathbf{v} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}) - \boldsymbol{\lambda}(t) = 0.$$

Второе из них позволяет явно исключить функцию $\boldsymbol{\lambda}$ — множитель Лагранжа: $\boldsymbol{\lambda}(t) = \nabla_\mathbf{v} L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))$. С помощью связи $\mathbf{f}' = \mathbf{g}$ можно явно исключить функцию $\mathbf{g}$. В итоге первое уравнение превращается, как и следовало ожидать, в уравнение Эйлера для функционала I

$$\nabla_\mathbf{x} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') - \frac{d}{dt} \nabla_\mathbf{v} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 0.$$

Рассмотрим функционал I_1 на множестве M, которое характеризуется более сложной связью

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)),$$

где $\mathbf{F} \in C^2(\Delta \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n)$. По-прежнему при некотором $\boldsymbol{\lambda} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ точка условного экстремума функционала I_1 является стационарной точкой функционала

$$I_\Lambda(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_\Delta [L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) + (\boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{f}'(t) - \mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)))]\, dt.$$

На этот раз уравнение Эйлера содержит следующие соотношения:

$$\nabla_\mathbf{x} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}) - (\mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}))^* \boldsymbol{\lambda}(t) - \boldsymbol{\lambda}'(t) = 0,$$

$$\nabla_\mathbf{v} L(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}) - (\mathbf{F}_\mathbf{v}(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}))^* \boldsymbol{\lambda}(t) = 0;$$

* означает переход к сопряженному оператору. Введем функцию

$$K(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

С ее помощью уравнение Эйлера перепишется в виде соотношений

$$\boldsymbol{\lambda}'(t) = -\nabla_\mathbf{x} K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)), \quad (1)$$

$$0 = \nabla_\mathbf{v} K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)), \quad (2)$$

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = \nabla_\lambda K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)), \quad (3)$$

---

* Ни функционал, ни связь не содержат $\mathbf{g}'$, поэтому обычное предположение $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in C^2$ излишне.

к которым мы присоединили уравнение связи. Второе из этих соотношений не содержит производных $\mathbf{f}'$, $\mathbf{g}'$, $\boldsymbol{\lambda}'$; его можно прочесть как уравнение для критической точки функции $K(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$, рассматриваемой как функция от $\mathbf{v}$ при фиксированных t, $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\lambda}$, и использовать для того, чтобы исключить функцию $\mathbf{g}$. Развивая подобную точку зрения, можно прийти к важному для приложений *принципу максимума* (принципу максимума Л. С. Понтрягина). Применительно к рассматриваемой задаче принцип максимума гласит: *в точке абсолютного минимума функционала I_1 на множестве функций* $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, *подчиненных связи* (3) *и удовлетворяющих условиям* $\mathbf{f}(a) = \boldsymbol{\xi}$, $\mathbf{f}(b) = \boldsymbol{\eta}$, *выполняются соотношение* (1) *и*

$$K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \max_{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n} K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}(t)). \tag{4}$$

Приведенная формулировка является чрезмерно узкой и не вскрывает полного объема принципа максимума, кроме того, она, строго говоря, не совсем точна.

Прежде чем переходить к содержательным комментариям, в порядке пояснения отметим три простых момента. Во-первых, в отличие от всех предыдущих утверждений в принципе максимума фигурирует не локальный, а *абсолютный минимум*. Во-вторых, функция K содержит L со знаком минус; это согласуется с тем, что в точке минимума функционала функция K достигает по переменной $\mathbf{v}$ максимума. В-третьих, точка максимума, конечно, является критической точкой и потому из (4) следует (2).

В порядке уточнения формулировки отметим, что точка абсолютного минимума функционала I_1 должна искаться не на множестве пар $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, гладкость которых характеризуется условиями $\mathbf{f} \in C^1$, $\mathbf{g} \in C$, а на несколько более обширном множестве. В приложениях точка абсолютного минимума $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ на этом более обширном множестве, которое мы не станем описывать явно, как правило, такова, что $\mathbf{f}$ в смысле гладкости не хуже, чем кусочно-непрерывно дифференцируемая функция, а $\mathbf{g}$ — кусочно-непрерывная функция.

Коротко отметим основные обобщения.

1) Утверждение справедливо не только в точке абсолютного минимума, но и на более широком множестве *точек сильного минимума*. Обычные точки минимума $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ функционала I_1 (иногда их называют *точками слабого минимума*) являются, по определению, точками абсолютного минимума функционала I_1, ограниченного на некоторую (*слабую*) *окрестность*, т. е. множество пар $(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}})$, удовлетворяющих условию

$$\|\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|^2_{C^1} + \|\tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{g}\|^2_C < \varepsilon^2$$

с некоторым ε. *Сильная окрестность* характеризуется менее ограничительным неравенством

$$\|\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_C < \varepsilon.$$

Запас функций, на которых следует контролировать эти неравенства (этот запас один и тот же в обоих случаях), мы, как было условлено, описывать не будем. Конечно, сильная окрестность содержит слабую окрестность, поэтому всякая точка сильного минимума является точкой слабого минимума (см. по этому поводу также п. 104).

2) В дополнение к условиям

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)), \quad \mathbf{f}(a) = \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{f}(b) = \boldsymbol{\eta},$$

характеризующим множество M, можно присоединить условие

$$\mathbf{g}(t) \in U,$$

где U — некоторое множество в $\mathbf{R}^n$. Если U — *открытое множество*, то сохраняется изложенная выше связь рассматриваемой задачи с задачей Лагранжа и

по-прежнему остается справедливым принцип максимума, в котором равенство (4) заменяется равенством

$$K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \max_{\mathbf{v} \in U} K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}(t)). \tag{5}$$

Как и прежде, оно влечет за собою соотношение (2). Если U — *замкнутое множество*, то связь с задачей Лагранжа исчезает, однако принцип максимума, т. е. соотношения (1) и (5), сохраняют силу, хотя из (5) на этот раз не следует (2).

В инженерных приложениях координата $\mathbf{x}$ описывает *состояние* рассматриваемой *системы*, а координата $\mathbf{v}$ описывает *управляющие параметры*, которые регулируют движение системы посредством дифференциальных уравнений для состояния

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

Предполагается, что управляющие параметры (координаты рулей, регуляторов и т. п.) не могут выходить за пределы некоторого множества U, называемого *областью управления*. Задача заключается в том, чтобы найти такое (*оптимальное*) *управление* — функцию $\mathbf{g}: \Delta \to \mathbf{R}^n$, которое порождает движение системы $\mathbf{f}$, переводящее состояние $\boldsymbol{\xi}$ в состояние $\boldsymbol{\eta}$ так, что некоторый функционал I_1 принимает наименьшее значение. Довольно ясно, что в такого рода задачах значения управления могут лежать на границе множества U; тем самым к рассмотрению должны допускаться и замкнутые множества U.

§ 3. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных

44. Интегральные функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. Интегральный функционал I, зависящий от функций нескольких переменных, определяется формулой

$$I(u) = \int_D L(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1}$$

В этой формуле D — фиксированное множество в $\mathbf{R}^k$, $L(\mathbf{x}, u, \mathbf{w})$ — заданная на $D \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$ вещественнозначная функция и u — принадлежащая некоторому множеству Ω функция на D со значениями в $\mathbf{R}$, которая является аргументом функционала. На подобные функционалы без существенных изменений переносится основная идея, которая развивалась выше для интегральных функционалов на множестве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, а именно идея связи между точками экстремума интегрального функционала и решениями некоторого дифференциального уравнения. На этот раз соответствующее дифференциальное уравнение оказывается *уравнением в частных производных*.

Начнем с описания тех классов функций u, на которых задается функционал (1). Эти функции обычно будут предполагаться определенными на множествах, которые мы условимся называть в дальнейшем *основными областями* и стандартно обозначать буквой D. Основная область D — это *ограниченное замкнутое множество* в пространстве $\mathbf{R}^k$, которое является *замыканием* некоторой *области* D' (т. е. *открытого связного множества*) — *внутренности* D и *граница* которого ∂D — достаточно *гладкое множество*. Мы не

будем явно характеризовать свойства границы ∂D, но предположим, включая это в определение основной области, что:

а) *в каждой точке* $\mathbf{x}$ *границы определен непрерывно зависящий от* $\mathbf{x}$ *единичный вектор* $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ *внешней нормали,*

б) *любая непрерывная функция* $u: D \to \mathbf{R}$ *интегрируема по* D *в смысле Римана,*

в) *непрерывно дифференцируемая функция* $u: D \to \mathbf{R}$, *ограниченная на* ∂D, *непрерывна,*

г) *для любой непрерывной функции* $u: \partial D \to \mathbf{R}$ *существует поверхностный интеграл первого рода по* ∂D,

д) *на* D *справедлива формула интегрирования по частям (формула Гаусса — Остроградского).*

Примеры подобных областей описываются в курсах анализа при обсуждении формулы Гаусса — Остроградского (см., например, [2]).

Не обсуждая условия а) — д) подробнее, отметим лишь, что они не независимы и могут быть сведены к меньшему числу предположений. Ниже в этом пункте появится еще одно предположение относительно области D.

Напомним, что в п. 32 мы условились считать функцию $u: D \to \mathbf{R}$ r раз непрерывно дифференцируемой ($u \in C^r(D)$), если существует такая r раз непрерывно дифференцируемая функция $u_1: D_1 \to \mathbf{R}$, D_1 — открытое множество, содержащее D, что ограничение u_1 на D совпадает с u. *Интеграл Римана* от функции u по D условимся обозначать

$$\int_D u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \text{или} \quad \int_D u\, d\mathbf{x}.$$

Поверхностный интеграл первого рода от функции u по ∂D условимся обозначать

$$\int_{\partial D} u(\mathbf{x})\, dS = \int_{\partial D} u\, dS.$$

Формула Гаусса — Остроградского состоит в следующем: если u, $v \in C^1(D)$, то

$$\int_D u v_{x_i}\, d\mathbf{x} = -\int_D u_{x_i} v\, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, (\mathbf{e}_i, n(\mathbf{x}))\, dS.$$

Здесь $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — единица на i-ом месте.

Если функция L в формуле (1) непрерывна, то функционал I определен на множестве $C^1(D)$; его называют *интегральным функционалом на* $C^1(D)$.

При рассмотрении экстремальных задач для функционала (1) используются три нормированных пространства.

1) Пространство $C(D)$. Его элементы — непрерывные функции $u: D \to \mathbf{R}$, норма дается формулой

$$\|u\| = \sup_{\mathbf{x} \in D} |u(\mathbf{x})|.$$

2) Пространство $C^1(D)$. Его элементы — непрерывно дифференцируемые функции $u: D \to \mathbf{R}$, норма дается формулой

$$\|u\|_{C^1} = \sup_{\mathbf{x} \in D} |u(\mathbf{x})| + \sup_{\mathbf{x} \in D} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^k}.$$

3) Пространство $C(\partial D)$. Его элементы — непрерывные функции $u: \partial D \to \mathbf{R}$, норма дается формулой

$$\|u\| = \sup_{\mathbf{x} \in \partial D} |u(\mathbf{x})|.$$

В дополнение к сформулированным выше условиям а) — д) на множество D предположим, что выполняется также условие

е) *множество ограничений функций из $C^1(D)$ на границу ∂D плотно в пространстве $C(\partial D)$.*

Это условие, так же как и условия а) — д), выглядит труднопроверяемым. Читатель должен иметь в виду, что *для всех областей D, имеющих гладкие в естественном смысле границы, условия* а) — е) *выполняются.*

Кроме функционала, аргументами которого являются функции u с числовыми значениями, в приложениях часто приходится иметь дело с функционалами I, аргументами которых являются *вектор-функции* $\mathbf{u}: D \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$:

$$I(\mathbf{u}) = \int_D L(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ — оператор $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ — производная вектор-функции $\mathbf{u}$ в точке $\mathbf{x}$. Напомним, что матрица оператора $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ есть *матрица Якоби* отображения $\mathbf{u}: \{u_{ix_j}(\mathbf{x})\}$. Принадлежность отображения $\mathbf{u}$ классу $C^r(D \to \mathbf{R}^n)$ равносильна тому, что каждая координата u_i, $i = 1, \ldots, n$, $(\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_n(\mathbf{x})))$ принадлежит $C^r(D)$. В п. 29 было показано, что множество операторов $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ образует нормированное пространство, которое было обозначено $\mathbf{L}(\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n)$. При переходе от функций $u: D \to \mathbf{R}$ к отображениям $\mathbf{u}: D \to \mathbf{R}^n$ пространства $C(D)$ и $C^1(D)$ заменяются пространствами $C(D \to \mathbf{R}^n)$ и $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$.

4) Пространство $C(D \to \mathbf{R}^n)$. Его элементы — непрерывные вектор-функции $\mathbf{u}: D \to \mathbf{R}^n$, норма дается формулой

$$\|\mathbf{u}\| = \sup_{\mathbf{x} \in D} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^n}.$$

5) Пространство $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$. Его элементы — непрерывно дифференцируемые вектор-функции $\mathbf{u}: D \to \mathbf{R}^n$, норма дается формулой

$$\|\mathbf{u}\|_{C^1} = \sup_{\mathbf{x} \in D} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^n} + \sup_{\mathbf{x} \in D} \|\mathbf{u}'(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}(\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n)}.$$

Аналогично $C(\partial D)$ вводится

6) Пространство $C(\partial D \to \mathbf{R}^n)$ с нормой $\|\mathbf{u}\| = \sup_{\mathbf{x} \in \partial D} \|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^n}$.

7) Евклидово пространство $H(D \to \mathbf{R}^n)$ определим сразу при

$n \geqslant 1$. Оно состоит из тех же элементов, что и пространство $C(D \to \mathbf{R}^n)$, скалярное произведение дается формулой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x))_{\mathbf{R}^n} dx.$$

Функция L в формуле (2) задана на $D \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{L}(\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n)$. Если L непрерывна, то функционал определен на $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$; его называют *интегральным функционалом на* $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$.

При $n = 1$ функционал (2) и норма в пространстве $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$ не переходят буквально в функционал (1) и норму в пространстве $C^1(D)$. Связь между функционалами (1) и (2) при $n = 1$ устанавливается формулой $u'(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = (\nabla u(\mathbf{x}), \boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^k$, к которой можно относиться как к определению градиента (см. п. 34). Эквивалентность экстремальных задач для функционала вида (1) на $C^1(D)$ и функционала вида (2) на $C^1(D \to \mathbf{R})$ — следствие равенства $\|\nabla u(\mathbf{x})\|_{\mathbf{R}^k} = \|u'(\mathbf{x})\|_{\mathbf{L}(\mathbf{R}^k \to \mathbf{R})}$, благодаря которому $\|u\|_{C^1(D)} = \|u\|_{C^1(D \to \mathbf{R})}$.

Равенство норм $\nabla u(\mathbf{x})$ и $u'(\mathbf{x})$ вытекает из следующего общего предложения: норма $\|l\|$ линейной функции l: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ вида $l(\boldsymbol{\xi}) = (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi})$ равна норме $\|\mathbf{g}\|$ вектора $\mathbf{g} \in \mathbf{R}^k$. В самом деле, $|l(\boldsymbol{\xi})| \leqslant \|\mathbf{g}\|\|\boldsymbol{\xi}\|$, поэтому $\|l\| \leqslant \|\mathbf{g}\|$; с другой стороны, $|l(\mathbf{g})| = \|\mathbf{g}\|^2 = \|\mathbf{g}\|\|\mathbf{g}\|$, поэтому $\|l\| \geqslant \|\mathbf{g}\|$; следовательно, $\|l\| = \|\mathbf{g}\|$.

45. Вариация функционала I. Рассмотрим вначале интегральный функционал вида (1) на пространстве $C^1(D)$. Повторяя без существенных изменений построения, проведенные выше для интегрального функционала на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, убеждаемся в следующем:

1) *Функционал I непрерывен.*

2) *Если $L \in C^r$, то функционал I во всех точках и имеет r-ю вариацию $\delta^r I(u, h)$, при этом*

$$\delta^r I(u; h) = \int_D d^r L(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}); 0, h(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

В частности,

$$\delta I(u; h) = \int_D dL(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}); 0, h(\mathbf{x}), \nabla h(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int_D [L_u(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, h(\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})), \nabla h(\mathbf{x}))]\, d\mathbf{x}.$$

В координатной записи

$$\delta I(u; h) = \int_D [L_u(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, h(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k L_{w_i}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, h_{x_i}(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x}.$$

3) *Если $L \in C^2$ и $u \in C^2$, то первая вариация функционала I с помощью интегрирования по частям может быть приведена к проинтегрированной форме*

$$\delta I(u; h) = \int_D [L_u(\mathbf{x}, u, \nabla u) - (\nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, u, \nabla u))]\, h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} (\mathbf{n}, \nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, u, \nabla u))\, h(\mathbf{x})\, dS.$$

Положим

$$L[u](\mathbf{x}) = L_u(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u) - (\nabla_{\mathbf{x}},\ \nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)) =$$
$$= L_u(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u) - \sum\nolimits_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} L_{w_i}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)$$

и

$$p[u](\mathbf{x}) = (\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x}))).$$

Тогда

$$\delta I(u;\ h) = \int_D L[u](\mathbf{x})\, h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} p[u](\mathbf{x})\, h(\mathbf{x})\, dS,$$

короче

$$\delta I(u;\ h) = (L[u],\ h)_H + \int_{\partial D} p[u]\, h\, dS.$$

4) *Вторая вариация* $\delta^2 I(u;\ h)$ *дается формулой*

$$\delta^2 I(u;\ h) = \int_D [L_{uu}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\, h^2(\mathbf{x}) +$$
$$+ 2(\nabla_{\mathbf{w}} L_u(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u),\ \nabla h)\, h(\mathbf{x}) + (\nabla_{\mathbf{w}} L_{\mathbf{w}}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\, \nabla h,\ \nabla h)]\, d\mathbf{x}.$$

В координатной записи

$$\delta^2 I(u;\ h) = \int_D [L_{uu}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\, h^2(\mathbf{x}) +$$
$$+ 2\sum\nolimits_{i=1}^{k} L_{uw_i}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\, h(\mathbf{x})\, h_{x_i}(\mathbf{x}) +$$
$$+ \sum\nolimits_{i,\ j=1}^{k} L_{w_i w_j}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\, h_{x_i}(\mathbf{x})\, h_{x_j}(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x}.$$

5) *Если* $L \in C^2$, *то функционал* I *непрерывно дифференцируем, при этом* $dI(u;\ h) = \delta I(u;\ h)$. *Если* $L \in C^3$, *то функционал* I *дважды непрерывно дифференцируем, при этом* $d^2 I(u;\ h) = \delta^2 I(u;\ h)$.

Аналогичные утверждения верны для интегрального функционала вида (2) на $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$. Приведем лишь формулу для первой вариации

$$\delta I(\mathbf{u};\ \mathbf{h}) = \int_D dL(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}';\ 0,\ \mathbf{h},\ \mathbf{h}')\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int_D [L_{\mathbf{u}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, \mathbf{h}(x) + L_{\mathbf{w}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, \mathbf{h}'(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int_D \sum\nolimits_{i=1}^{n} \Big[L_{u_i}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, h_i(\mathbf{x}) + \sum\nolimits_{j=1}^{k} L_{w_{ij}}(x,\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, h_{ix_j}(\mathbf{x})\Big]\, d\mathbf{x}.$$

В последнем выражении $\{w_{ij}\}$ — матрица оператора $\mathbf{w}: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$. Предполагая, что $\mathbf{u} \in C^2$, можно получить проинтегрированную форму первой вариации

$$\delta I(\mathbf{u};\ \mathbf{h}) = \int_D \sum\nolimits_{i=1}^{n} \Big[L_{u_i}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}') - \sum\nolimits_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} L_{w_{ij}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\Big] \times$$
$$\times h_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int_{\partial D} \sum\nolimits_{i,\ j} L_{w_{ij}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, h_i(\mathbf{x})\, n_j(\mathbf{x})\, dS.$$

Введем вектор-функцию $L[\mathbf{u}]: D \to \mathbf{R}^n$, полагая

$$(L[\mathbf{u}](\mathbf{x}))_i = L_{u_i}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}') - \sum\nolimits_{j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_j} L_{w_{ij}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}'),$$

и вектор-функцию $p[\mathbf{u}]:\partial D\to\mathbf{R}^n$, полагая

$$(p[\mathbf{u}](\mathbf{x}))_i=\sum_{j=1}^k L_{w_{ij}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\,n_j(\mathbf{x}).$$

Эти обозначения позволяют переписать вариацию короче:

$$\delta I(\mathbf{u};\ \mathbf{h})=\int_D (L[\mathbf{u}](\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}+\int_{\partial D}(p[\mathbf{u}](\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS=$$
$$=(L[\mathbf{u}],\ \mathbf{h})_H+\int_{\partial D}(p[\mathbf{u}],\ \mathbf{h})\,dS.$$

46. Уравнение Эйлера — Остроградского. Обозначим через $S(D\to\mathbf{R}^n)$ множество бесконечно дифференцируемых финитных на D (т. е. аннулирующихся в некоторой окрестности границы) функций $\mathbf{u}:D\to\mathbf{R}^n$. Положим, как обычно, $S(D)=S(D\to\mathbf{R})$.

Лемма Лагранжа (многомерный вариант обобщенной леммы Лагранжа). *Функционал*

$$L(h)=\int_D g(\mathbf{x})\,h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

на множестве $S(D)$, *где* $g\in C(D)$, *равен нулю тогда и только тогда, когда* $g=0$.

Доказательство. Допустим, что $g\neq 0$. Тогда найдется такая точка $\mathbf{a}$, внутренняя точка D, что $g(\mathbf{a})\neq 0$; пусть $g(\mathbf{a})>0$. В силу непрерывности g неравенство $g(\mathbf{x})\geqslant\varepsilon>0$ выполняется в некотором расположенном внутри D шаре $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\leqslant\delta$, $\delta>0$. Можно построить функцию h, $h\in S(D)$, положительную внутри шара $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta$ и равную нулю вне шара $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|>\delta$. Вот пример:

$$h(\mathbf{x})=\begin{cases}\exp[\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2-\delta^2]^{-1}, & \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta,\\ 0 & ,\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\geqslant\delta.\end{cases}$$

Тогда

$$\int_D g(\mathbf{x})\,h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\leqslant\delta} g(\mathbf{x})\,h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\geqslant\varepsilon\int_{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\leqslant\delta} h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}>0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Ни в формулировке, ни в доказательстве леммы Лагранжа размерность k множества D не играет роли, и можно считать, в частности, что $k=1$.

Стационарные точки функционала I. Для функционалов на $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ при определенных предположениях относительно функции L было доказано, что стационарные точки функционала принадлежат классу C^2. Для функционалов на $C^1(D\to\mathbf{R}^n)$ этот факт уже не является элементарным.

Пусть $L\in C^2$ *и* $\mathbf{u}\in C^2$ *Для того чтобы функция* $\mathbf{u}$ *была стационарной (критической) точкой функционала* I, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись уравнение* $L[\mathbf{u}]=0$ (*уравнение Эйлера — Остроградского) и граничные условия* $p[\mathbf{u}]=0$ (*естественные граничные условия*).

Достаточность немедленно следует из проинтегрированной формы первой вариации. Докажем необходимость. Пусть $\delta I(\mathbf{u};\ \mathbf{h})=0$ при $\mathbf{h}\in C^1(D\to\mathbf{R}^n)$. Если $\mathbf{h}\in S(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, то

$$\delta I(\mathbf{u};\ \mathbf{h})=\int_D (L[\mathbf{u}](\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}=0.$$

Отсюда в силу леммы Лагранжа следует уравнение Эйлера — Остроградского $L[\mathbf{u}]=0$. Вновь полагаем $\mathbf{h}\in C^1(D\to\mathbf{R}^n)$. Так как выполнено уравнение Эйлера — Остроградского, то

$$\delta I(\mathbf{u};\ \mathbf{h})=\int_{\partial D}(p[\mathbf{u}](\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS=0.$$

Согласно условию е) п. 44 множество ограничений функций $h\in C^1(D)$ на ∂D — плотное множество в $C(\partial D)$. Относя этот факт к каждой координате вектор-функции $\mathbf{h}\in C^1(D\to\mathbf{R}^n)$, можно утверждать, что он переносится на пространства $C^1(D\to\mathbf{R}^n)$ и $C(\partial D\to\mathbf{R}^n)$. Из формулы

$$\int_{\partial D}(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS=0,$$

где $\mathbf{g}\in C(\partial D\to\mathbf{R}^n)$ — фиксированная функция, а $\mathbf{h}\in C^1(D\to\mathbf{R}^n)$ — произвольная функция, следует такая же формула для произвольной $\mathbf{h}\in C(\partial D\to\mathbf{R}^n)$. В самом деле, если $\mathbf{h}\in C(\partial D\to\mathbf{R}^n)$ и $\tilde{\mathbf{h}}\in C^1(D\to\mathbf{R}^n)$,
то

$$\left|\int_{\partial D}(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS\right|=\left|\int_{\partial D}(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS-\right.$$

$$\left.-\int_{\partial D}(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))\,dS\right.=\left|\int_{\partial D}(\mathbf{g}(\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x})-\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}))\,dS\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\partial D}\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|\ \|\mathbf{h}(\mathbf{x})-\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})\|\,dS\leqslant\|\mathbf{g}\|_C\|\mathbf{h}-\tilde{\mathbf{h}}\|_C\,S,$$

где $S=\int_{\partial D}1\,dS$ — *площадь границы* ∂D. Ввиду того, что норма $\|\mathbf{h}-\tilde{\mathbf{h}}\|_C$ может быть сделана произвольно малой за счет выбора $\tilde{\mathbf{h}}$, приходим к объявленному утверждению.

Итак, можно утверждать, что

$$\int_{\partial D}(p[\mathbf{u}](\mathbf{x}),\ \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS=0,$$

где $\mathbf{h}\in C(\partial D\to\mathbf{R}^n)$ произвольно. Положим $\mathbf{h}=p[\mathbf{u}]$, тогда

$$\int_{\partial D}\|p[\mathbf{u}](\mathbf{x})\|^2\,dS=0.$$

Граничное условие $p[\mathbf{u}]=0$ доказано.

Уравнение Эйлера — Остроградского. Выпишем уравнение Эйлера — Остроградского подробнее. При $n=1$

$$L[u](\mathbf{x})=L_u(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)-\sum_{i=1}^k L_{w_i x_i}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)-$$

$$-\sum_{i=1}^k L_{w_i u}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\,u_{x_i}-\sum_{i,j=1}^k L_{w_i w_j}(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\,u_{x_j x_i}=0.$$

Для вектор-функций

$$(L[\mathbf{u}](\mathbf{x}))_l = L_{u_l}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}') - \sum_{j=1}^{k} L_{w_{lj}x_j}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}') -$$
$$- \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{n} L_{w_{ij}u_l}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, u_{lx_j}(\mathbf{x}) -$$
$$- \sum_{j=1}^{k} \sum_{i'=1}^{n} \sum_{j'=1}^{k} L_{w_{ij}w_{i'j'}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}')\, \mathbf{u}_{i'\,x_{j'}x_j} = 0.$$

Уравнение Эйлера — Остроградского является дифференциальным уравнением (системой дифференциальных уравнений) второго порядка. Решения уравнения Эйлера — Остроградского называют *экстремалями* функционала. Естественные граничные условия

$$(\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x},\ u,\ \nabla u)\,|_{\partial D}) = 0$$

устанавливают связь между u и ∇u на границе. В случае вектор-функций естественные граничные условия выглядят следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{k} L_{w_{ij}}(\mathbf{x},\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}'\ )\, n_j(\mathbf{x}) = 0.$$

Примеры. Пусть $n = 1$ и $L(\mathbf{x},\ u,\ \mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{w}^2 + vu^2) - fu$, где v и f — заданные функции $D \to \mathbf{R}$. В этом случае

$$I(u) = \int_D \left\{\frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 + vu^2\right] - fu\right\} d\mathbf{x}.$$

Уравнение Эйлера — Остроградского имеет вид

$$-\Delta u + vu = f,$$

где Δ — *оператор Лапласа в* $\mathbf{R}^k$:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{k} u_{x_i x_i}.$$

Естественные граничные условия

$$(\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x}))\,|_{\partial D} = 0 \ \text{ или } \left.\frac{du}{dn}\right|_{\partial D} = 0.$$

При $v = 0$ приходим к *задаче Неймана* для *неоднородного уравнения Лапласа (уравнения Пуассона)*. При $v = 0$, $f = 0$ экстремали — *гармонические функции*.

Интеграл

$$I(u) = \int_D (1 + (\nabla u(\mathbf{x}))^2)^{1/2}\, d\mathbf{x}$$

равен *площади поверхности в* $\mathbf{R}^{k+1}$, точки $(\mathbf{x},\ y) = (x_1, \ldots,\ x_k,\ y)$ которой определяются уравнением

$$y = u(\mathbf{x}).$$

Уравнение Эйлера — Остроградского для функционала I имеет вид

$$\left(\nabla,\ \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}}\right) = 0,$$

естественные граничные условия

$$\left(\mathbf{n}, \frac{\nabla u}{\sqrt{1+(\nabla u)^2}}\right)\Bigg|_{\partial D}=0 \text{ или } \frac{du}{dn}\Bigg|_{\partial D}=0.$$

Ясно, что постоянная функция является стационарной точкой функционала. Экстремали функционала I называют *минимальными поверхностями*. Можно показать, что уравнение Эйлера — Остроградского допускает в данном случае простую геометрическую интерпретацию: оно означает, что *средняя кривизна* во всех точках минимальной поверхности равна нулю.

На функционалы, заданные на нормированных пространствах E, элементами которых являются некоторые функции $D\to\mathbf{R}^n$, легко перенести понятие *вариационной производной*. Будем считать, что пространство E содержит множество $S(D\to\mathbf{R}^n)$. Рассмотрим функционал I: $E\to\mathbf{R}$. Говорят, что функционал имеет в точке $\mathbf{u}$ вариационную производную, если существует такая функция $\boldsymbol{\lambda}\in C(D\to\mathbf{R}^n)$, что при всех $\mathbf{h}\in S(D\to\mathbf{R}^n)$ справедливо представление

$$I'(\mathbf{u})\,\mathbf{h}=(\boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{h})_H.$$

При этом функцию $\boldsymbol{\lambda}$ называют *вариационной производной функционала I на функции* $\mathbf{u}$ и пишут

$$\boldsymbol{\lambda}=\frac{\delta I(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}},\quad \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x})=\frac{\delta I(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})},\quad \lambda_i(x)=\frac{\delta I(\mathbf{u})}{\delta u_i(\mathbf{x})}.$$

Интегральный функционал имеет вариационную производную во всех точках, при этом

$$\frac{\delta I(\mathbf{u})}{\delta\mathbf{u}}=L[\mathbf{u}].$$

47. Экстремальные задачи. Все рассмотренные выше экстремальные задачи для функционалов на функциях $\Delta\to\mathbf{R}^n$ обобщаются на функционалы, аргументами которых являются функции нескольких переменных.

Задача со свободными граничными точками — это задача на отыскание точек экстремума интегрального функционала I на пространстве $C^1(D\to\mathbf{R}^n)$. Точки экстремума в такой задаче — стационарные точки функционала. Следовательно, *точки экстремума, принадлежащие C^2, удовлетворяют уравнению Эйлера — Остроградского и естественным граничным условиям.*

Узнать характер экстремума можно с помощью *условия Лежандра*. Обсудим это условие при $n=1$.

Квадратичный интегральный функционал на $C^1(D)$ по определению имеет вид

$$K(h)=\int_D[Q(\mathbf{x})\,h^2(\mathbf{x})+2\,(R(\mathbf{x}),\ \nabla h(\mathbf{x}))\,h(\mathbf{x})+(P(\mathbf{x})\,\nabla h(\mathbf{x}),\ \nabla h(\mathbf{x}))]\,d\mathbf{x},$$

здесь Q — функция $D\to\mathbf{R}$, R — вектор-функция $D\to\mathbf{R}^k$, а P — функция $D\to\mathbf{L}(\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^k)$, значениями которой являются операторы в $\mathbf{R}^k$. Отображения Q, R и P считаются непрерывными.

Обозначим через $C_0^1(D)$ множество функций u из $C^1(D)$, удовлетворяющих условию $u|_{\partial D}=0$. Обобщая естественным образом построения п. 21, можно доказать лемму.

Лемма. *Если функционал K положителен на $C_0^1(D)$, т. е. $K(h)\geqslant 0$ при $h\in C_0^1(D)$, то при всех* $\mathbf{x}$ *положителен оператор* $P(\mathbf{x})$.

Вторая вариация $\delta^2 I(u;\ h)$ функционала I — квадратичный интегральный функционал, при этом $P(\mathbf{x})=\nabla_{\mathbf{w}}L_{\mathbf{w}}(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x}))$. В точке минимума (максимума) $\delta^2 I(u;\ h)\geqslant 0$ ($\leqslant 0$) при $h\in C^1(D)$. Поэтому выполняется

Условие Лежандра. *В точке минимума (максимума) и в задаче со свободными граничными точками оператор* $\nabla_{\mathbf{w}}L_{\mathbf{w}}(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x}))$ *положителен (отрицателен) при всех* $\mathbf{x}$:

$$\sum_{i,\ j=1}^{k} L_{w_i w_j}(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x}))\ \xi_i\xi_j\geqslant 0\ \ (\leqslant 0).$$

Обратимся к примерам, рассмотренным в предыдущем пункте. Если $L(\mathbf{x},\ u,\ \mathbf{w})=\frac{1}{2}(\mathbf{w}^2+vu^2)-fu$, то $L_{w_i w_j}=\delta_{ij}$, так что функционал I не может иметь точек максимума. Если $L(\mathbf{x},\ u,\ \mathbf{w})=(1+\mathbf{w}^2)^{1/2}$, то

$$L_{w_i w_j}=\frac{\delta_{ij}(1+\mathbf{w}^2)-w_i w_j}{(1+\mathbf{w}^2)^{1/2}},$$

следовательно,

$$\sum_{ij}L_{w_i w_j}\xi_i\xi_j=\frac{\xi^2(1+\mathbf{w}^2)-(\mathbf{w},\ \xi)^2}{(1+\mathbf{w}^2)^{1/2}}\geqslant\frac{\xi^2}{(1+\mathbf{w}^2)^{1/2}}.$$

Таким образом, функционал I также не может иметь точек максимума.

Задача с заданными граничными точками. Эта задача состоит в отыскании точек экстремума функционала I на множестве $C_{\varphi}^1(D\to\mathbf{R}^n)$ функций из $C^1(D\to\mathbf{R}^n)$, принимающих на границе ∂D заданные значения

$$\mathbf{u}|_{\partial D}=\boldsymbol{\varphi},$$

$\boldsymbol{\varphi}\in C(\partial D\to\mathbf{R}^n)$ — заданная функция.

Если $\mathbf{u}$ — *принадлежащая C^2 точка экстремума, то* $\mathbf{u}$ — *решение краевой задачи*

$$L[\mathbf{u}]=0,\ \ \mathbf{u}|_{\partial D}=\boldsymbol{\varphi}.$$

На этот случай без всяких изменений переносится условие Лежандра.

Если $L(\mathbf{x},\ u,\ \mathbf{w})=\frac{1}{2}(\mathbf{w}^2+vu^2)-fu$, то краевая задача оказывается *задачей Дирихле для уравнения Шредингера*:

$$-\Delta u+vu=f,\ \ u|_{\partial D}=\varphi.$$

Утверждение, которое гласит, что точка минимума функционала

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_D(\nabla u)^2\,d\mathbf{x}$$

на множестве $C^1_\varphi(D)$ является решением задачи Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u|_{\partial D} = \varphi,$$

известно под названием *принципа Дирихле*. Благодаря многочисленным приложениям уравнения Лапласа принцип Дирихле является важным утверждением. С принципом Дирихле связаны два непростых вопроса: *существует ли при данных* D и φ *точка минимума и принадлежит ли точка минимума классу* C^2? Ответы на оба эти вопроса при подходящих D и φ положительны, их исследование сыграло важную роль в развитии вариационного исчисления. Отметим, что в настоящей книге эти вопросы обсуждаться не будут.

Для функционалов на $C^1(D \to \mathbf{R}^n)$ можно рассмотреть также изопериметрическую задачу и задачу Лагранжа. Результаты § 2, где эти задачи изучались для функционалов на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, естественно обобщаются на этот случай.

§ 4. Связь вариационного исчисления с механикой

48. Лагранжева механическая система. Дифференциальные *уравнения Ньютона для потенциальной системы N материальных точек*, имеют, как известно из механики, вид

$$m_i \mathbf{r}_i'' = -U_{\mathbf{r}_i}(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N).$$

Здесь t — *время*, $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{r}_i(t)$ — *положение* i-й частицы в момент t, $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbf{R}^3$, m_i — *масса* i-й частицы, $U(t, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ — *потенциальная энергия* системы в момент времени t в *конфигурации* $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \in \mathbf{R}^{3N}$. Введем на $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^{3N})$ функционал

$$\mathbf{f} \to S(\mathbf{f}) = \int_\Delta [T(\mathbf{f}') - U(t, \mathbf{f})]\, dt,$$

где $T(\mathbf{v})$ — *кинетическая энергия системы*, имеющей *скорость* $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) \in \mathbf{R}^{3N}$; $\mathbf{v}_i$ — скорость i-й частицы, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^3$,

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2.$$

Уравнение Эйлера для функционала S

$$-U_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{f}) - \frac{d}{dt} T'(\mathbf{f}') = 0,$$

записанное в координатах, совпадает с системой уравнений Ньютона

$$-U_{\mathbf{r}_i}(t, \mathbf{f}) - m_i \mathbf{f}_i'' = 0, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{f}_i(t), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Оказывается, что класс механических систем, уравнения движения для которых совпадают с уравнением Эйлера для некоторого естественного интегрального функционала, чрезвычайно обширен. Такие системы занимают важное положение в механике и называются *лагранжевыми*. При исследовании лагранжевых систем с успехом используются формульный аппарат и геометрические идеи вариационного исчисления, о которых пойдет речь

в гл. IV и V. В число лагранжевых систем входят не только системы с *конечным числом степеней свободы*, но и *поля*, *системы с бесконечным числом степеней свободы*, например различные механические модели *сплошных сред*. Общий язык вариационного исчисления сближает системы с конечным и бесконечным числом степеней свободы. Он также позволяет рассматривать как механические системы поля, которые не имеют непосредственного механического смысла, например *электромагнитное поле* и поля, возникающие в теории *элементарных частиц*. Аппарат вариационного исчисления используется и при *квантовании* лагранжевых механических систем, опять-таки независимо от того, имеют они конечное или бесконечное число степеней свободы.

Для того чтобы аппарат вариационного исчисления можно было применить к системам с бесконечным числом степеней свободы, его следует обобщить на тот случай, когда роль основного пространства вместо $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ играет пространство $C^1(\Delta \to E)$, E — нормированное пространство. Элементами пространства $C^1(\Delta \to E)$ являются отображения $\mathbf{f}\colon \Delta \to E$ класса C^1. Норма определяется по аналогии с $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$:

$$\|\mathbf{f}\| = \sup_{t\in\Delta} \|\mathbf{f}(t)\| + \sup_{t\in\Delta} \|\mathbf{f}'(t)\|.$$

Оба слагаемых здесь конечны, ибо функции $\|\mathbf{f}(\cdot)\|$ и $\|\mathbf{f}'(\cdot)\|$, заданные на Δ и принимающие значения на $[0, \infty)$, непрерывны. Интегральный функционал I на $C^1(\Delta \to E)$ определяется обычной формулой

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt,$$

где L — непрерывное отображение $\Delta \times E \times E \to \mathbf{R}$. Без изменений переносятся на этот случай все утверждения о непрерывности и дифференцируемости функционала I, при этом

$$I'(\mathbf{f})\mathbf{h} = dI(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = \delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h}) = \int_\Delta dL(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t);\ 0,\ \mathbf{h}(t),\ \mathbf{h}'(t))\, dt =$$
$$= \int_\Delta [L_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,\mathbf{h}(t) + L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,\mathbf{h}'(t)]\, dt.$$

Стационарные (критические) точки по-прежнему характеризуются условиями

$$p^*[\mathbf{f}](t) = L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)) \in C^1(\Delta \to E),$$
$$L^*[\mathbf{f}](t) = L_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)) - \frac{d}{dt} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)) = 0,$$
$$p^*[\mathbf{f}](t)\,|_{a,\,b} = 0.$$

Отметим, что отображения $p^*[\mathbf{f}]\colon \Delta \to L(E)$ и $L^*[\mathbf{f}]\colon \Delta \to L(E)$ при $E = \mathbf{R}^n$ не тождественны отображениям $p[\mathbf{f}]\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ и $L[\mathbf{f}]\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$. Они связаны друг с другом формулами

$$p^*[\mathbf{f}](t)\,\xi = (p[\mathbf{f}](t),\ \xi),$$
$$L^*[\mathbf{f}](t)\,\xi = (L[\mathbf{f}](t),\ \xi),\quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

При $\mathbf{f} \in C^2$ уравнение $L^*[\mathbf{f}] = 0$ превращается в дифференциаль-

ное уравнение второго порядка (уравнение Эйлера)

$$L^*[\mathbf{f}](t)=L_{\mathbf{x}}(t,\mathbf{f},\mathbf{f}')-L_{\mathbf{v}t}(t,\mathbf{f},\mathbf{f}')-L_{\mathbf{vx}}(t,\mathbf{f},\mathbf{f}')\,\mathbf{f}'-L_{\mathbf{vv}}(t,\mathbf{f},\mathbf{f}')\,\mathbf{f}''=0.$$

Всякое решение уравнения Эйлера называется экстремалью функционала I. При дополнительных предположениях относительно L и пространства E можно доказать, что из $p^*[\mathbf{f}]\in C^1$ следует $\mathbf{f}\in C^2$. На произвольном отображении $\mathbf{f}\in C^2$ производная $I'(\mathbf{f})$ имеет вид

$$I'(\mathbf{f})\,\mathbf{h}=\int_\Delta L^*[\mathbf{f}](t)\,\mathbf{h}(t)\,dt+p^*[\mathbf{f}](t)\,\mathbf{h}(t)\,|_\Delta.$$

Точки экстремума в задачах со свободными и с заданными граничными точками характеризуются, как обычно, уравнением $L^*[\mathbf{f}]=0$ и граничными условиями $p^*[\mathbf{f}]_{a,b}=0$ и $\mathbf{f}|_a=\xi$, $\mathbf{f}|_b=\eta$ соответственно.

Опишем теперь терминологию, которая используется в теории лагранжевых систем. *Лагранжевой механической системой* называется пара (E, L), где E — нормированное пространство, а L — функционал на $\mathbf{R}\times E^2$. Пространство E называется *конфигурационным пространством* системы, пространство E^2 — *пространством состояний*, функционал L — *функцией Лагранжа*, или *лагранжианом*. Первый аргумент функции Лагранжа называют *временем*, первую координату пары $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, элемента E^2, — *конфигурацией*, а вторую — *скоростью системы*. Размерность пространства E называют *числом степеней свободы системы*. Система с бесконечным, т. е. не конечным, числом степеней свободы называется *полем*. *Действием системы* на интервале Δ называется функционал

$$\mathbf{f}\to S_\Delta(\mathbf{f})=\int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,dt,$$

где $\mathbf{f}\colon \Delta\to E$. Уравнение Эйлера $L^*[\mathbf{f}]=0$ называется *уравнением движения* или уравнением Лагранжа системы, *движением системы* (на интервале времени Δ) называется экстремаль функционала S_Δ.

Можно во внутренних механических терминах охарактеризовать богатый класс механических систем, которые являются лагранжевыми.

Утверждение, гласящее, что механической системе можно сопоставить функцию Лагранжа так, что она превратится в лагранжеву механическую систему, называется в механике *принципом Гамильтона*. Иногда принцип Гамильтона называют *принципом наименьшего действия*, подразумевая, что механическое движение сообщает действию S_Δ минимум на множестве $C^1_{\xi\eta}(\Delta\to E)$ отображений $\mathbf{f}$ с той же начальной и конечной конфигурациями: $\mathbf{f}(a)=\xi$, $\mathbf{f}(b)=\eta$, что и у движения системы. Подобное положение, в которое бесспорно верили, когда зарождались вариационные принципы механики, нередко, но далеко не всегда, имеет место. Для лагранжевых систем всегда, однако, имеет место *стационарность действия* на механическом движении, т. е. выполняется равенство $\delta I(\mathbf{f};\ \mathbf{h})=0$ при $\mathbf{h}\in C^1_0(\Delta\to E)$. Как обычно, $C^1_0(\Delta\to E)$ по определению состоит из отображений, удовлетворяющих условиям $\mathbf{h}(a)=0$, $\mathbf{h}(b)=0$.

В приложениях функция Лагранжа часто имеет вид

$$L=T-U,$$

где T — *квадратичный функционал* скорости $\mathbf{v}$ при фиксированных других аргументах, а U не зависит от $\mathbf{v}$. Функционал T называется *кинетической энергией* системы, функционал U — *потенциальной*. Подобные механические системы иногда называют *натуральными*.

Пример. Пусть движение потенциальной системы N материальных точек *ограничено связями*. Предположим, что связи сводятся к выделению в конфигурационном пространстве $\mathbf{R}^{3N}$ подмножества M, которому может принадлежать конфигурация системы. Пусть это подмножество является образом гладкого отображения Φ: $\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^{3N}$. Если $\mathbf{f}$: $\Delta\to\mathbf{R}^k$ — путь в $\mathbf{R}^k$, то ему соответствует путь $\Phi\circ\mathbf{f}$: $\Delta\to\mathbf{R}^{3N}$ на M. Скорость этого пути равна

$$t\to\Phi'(\mathbf{f}(t))\,\mathbf{f}'(t).$$

Ему отвечает кинетическая энергия

$$T(\Phi'(\mathbf{f}(t))\,\mathbf{f}'(t))=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i'\left(\sum_{j=1}^{k}\Phi_{iu_j}(\mathbf{f}(t))\,f_j'(t)\right)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{k}A_{ij}(\mathbf{f}(t))\,f_i'(t)\,f_j'(t)),$$

где

$$A_{ij}(\mathbf{u})=\sum_{k=1}^{3N}m_k'\Phi_{ku_i}(\mathbf{u})\,\Phi_{ku_j}(\mathbf{u}),\quad m_{3i+l}'=m_i,\quad l=1,\ 2,\ 3.$$

Рассмотрим лагранжеву систему, отвечающую паре $(\mathbf{R}^k,\ L^*)$, где

$$L^*=T^*-U^*,\ T^*(t,\mathbf{u},\mathbf{v})=\frac{1}{2}\sum_{i,\ j=1}^{k}A_{ij}(\mathbf{u})\,v_iv_j,\ U^*(t,\mathbf{u},\mathbf{v})=U(t,\Phi(\mathbf{u}))$$

В курсах механики показывается, что если $\mathbf{f}$: $\Delta\to\mathbf{R}^k$ — движение такой системы, то $\Phi\circ\mathbf{f}$: $\Delta\to\mathbf{R}^{3N}$ — движение исходной, ограниченной связями, системы. Если отображение Φ обратимо, то всякое движение исходной можно описать подобным образом, так что исследование исходной системы сводится к исследованию пары $(\mathbf{R}^k,\ L^*)$, которая является натуральной лагранжевой системой с k степенями свободы.

Рассмотренную систему можно было бы связать с вариационным исчислением иначе. Можно было бы охарактеризовать ее движения как функции, значения которых лежат на M и которые аннулируют действие S на смещениях, подчиненных связям: $\delta S(\mathbf{f};\ \mathbf{h})=0$ для $\mathbf{h}\in M_{\mathbf{f}}\subset\mathbf{R}^{3N}$, $M_{\mathbf{f}}$ — подпространство, касательное к M в точке $\mathbf{f}$. В этом подходе обнаруживается связь с задачей Лагранжа.

49. Локальные поля. *Поле называется локальным, если:* 1) $E=C^1(\Omega\to\mathbf{R}^n)$, 2) *функция Лагранжа имеет вид*

$$L(t,\ \mathbf{u},\ \mathbf{v})=\int_\Omega d\mathbf{x}\mathscr{L}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{u}(x),\ \mathbf{v}(\mathbf{x}),\ \mathbf{u}'(\mathbf{x})).$$

Функция $\mathscr{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ называется *плотностью функции Лагранжа*, она предполагается гладкой (как минимум принадлежащей классу C^2). Под Ω подразумевается либо *основная область* в $\mathbf{R}^l$, либо $\Omega = \mathbf{R}^l$. В последнем случае в пространство включаются только достаточно быстро стремящиеся к нулю вместе с производными отображения $\mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^n$, а плотность функции Лагранжа $\mathscr{L}$ считается достаточно быстро стремящейся к нулю вместе с производными при $\mathbf{x} \to \infty$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \to 0$. Локальное поле называется *скалярным*, если $n = 1$.

Для локального поля действие на интервале времени Δ дается интегралом

$$S_\Delta(\mathbf{f}) = \int_\Delta dt \int_\Omega d\mathbf{x} \mathscr{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}_t(t, \mathbf{x}), \mathbf{u}_\mathbf{x}(t, \mathbf{x})),$$

где значение $\mathbf{f}(t)(\mathbf{x})$ отображения $\mathbf{f}(t)$: $\Omega \to \mathbf{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ обозначено $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$: $\mathbf{f}(t)(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Таким образом, $\mathbf{f} \to S_\Delta(\mathbf{f})$ может рассматриваться как интегральный функционал $\mathbf{u} \to S_D(\mathbf{u})$ на множестве отображений $\mathbf{u}$: $D = \Delta \times \Omega \to \mathbf{R}^n$. Какова связь между уравнением Эйлера $L^*[\mathbf{f}] = 0$ для функционала S_Δ и уравнением Эйлера — Остроградского $\mathscr{L}[\mathbf{u}] = 0$ для функционала S_D? Уравнение $L^*[\mathbf{f}] = 0$ равносильно уравнению $L^*[\mathbf{f}](t)\mathbf{h} = 0$, где $\mathbf{h}$ — произвольный элемент пространства $E = C^1(\Omega \to \mathbf{R}^n)$. Подробнее

$$L^*[\mathbf{f}](t)\mathbf{h} = L_\mathbf{u}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{h} - \frac{d}{dt} L_\mathbf{v}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{h}.$$

Для локального поля

$$L_\mathbf{u}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{h} = \int_\Omega d\mathbf{x}\,[\mathscr{L}_\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathscr{L}_\mathbf{w}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_\mathbf{x})\mathbf{h}'(\mathbf{x})],$$

$$L_\mathbf{v}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\mathbf{h} = \int_\Omega d\mathbf{x} \mathscr{L}_\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{x}).$$

Поэтому

$$L^*[\mathbf{f}](t)\mathbf{h} = \int_\Omega d\mathbf{x}\left[\mathscr{L}_\mathbf{u}(\ldots)\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathscr{L}_\mathbf{w}(\ldots)\mathbf{h}'(\mathbf{x}) - \frac{d}{dt}\mathscr{L}_\mathbf{v}(\ldots)\mathbf{h}(\mathbf{x})\right],$$

где $\mathbf{h}$ — произвольный элемент пространства E. Если отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ принадлежит классу C^2, в последнем соотношении можно выполнить интегрирование по частям:

$$L^*[\mathbf{f}](t)\mathbf{h} = \int_\Omega (\mathscr{L}[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t), \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (p[\mathbf{u}](\mathbf{x}, t), \mathbf{h}(\mathbf{x}))\,dS.$$

Отсюда следует, что *уравнение Эйлера* $L^*[\mathbf{f}] = 0$ *равносильно уравнению Эйлера — Остроградского* $\mathscr{L}[\mathbf{u}] = 0$ *на цилиндрическом множестве* $\Delta \times \Omega$ *и естественному граничному условию* $p[\mathbf{u}] = 0$ *на «боковой» границе* $\Delta \times \partial\Omega$ *этого множества. Таким образом, уравнение движения для локального поля заключает в себе уравнение Эйлера—Остроградского* $\mathscr{L}[\mathbf{u}] = 0$ *и естественное граничное условие* $p[\mathbf{u}] = 0$ *на* $\Delta \times \partial\Omega$. В том случае, когда $\Omega = \mathbf{R}^l$, естественные граничные условия выпадают.

Если в определении локального поля Ω — *основная область*, $\Omega \neq \mathbf{R}^l$, а описание функции Лагранжа заменено более общим:

$$L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathscr{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathscr{M}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x}))\, dS_{\mathbf{x}},$$

то поле называется *нагруженным локальным полем*. Функция $\mathscr{M}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ в этом определении предполагается непрерывной. Нетрудно убедиться, что уравнение Эйлера $L[\mathbf{f}] = 0$ в этом случае равносильно уравнению Эйлера — Остроградского $\mathscr{L}[\mathbf{u}] = 0$ и граничному условию $p[\mathbf{u}] + \mathscr{M}_{\mathbf{u}} - \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{M}_{\mathbf{v}} = 0$ на $\Delta \times \partial\Omega$.

Запишем основные уравнения для локального поля в терминах *вариационных производных*. Так как $\mathscr{L}[\mathbf{u}] = \frac{\delta S_D(\mathbf{u})}{\delta \mathbf{u}}$, то уравнение Эйлера—Остроградского $\mathscr{L}[\mathbf{u}] = 0$ можно записать следующим образом: $\frac{\delta S_D(\mathbf{u})}{\delta \mathbf{u}} = 0$.

Введем теперь вместо производных $L_{\mathbf{u}}$ и $L_{\mathbf{v}}$ вариационные производные $\frac{\delta L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\delta \mathbf{u}}$ и $\frac{\delta L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\delta \mathbf{u}}$:

$$L_{\mathbf{u}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{h} = \left(\frac{\delta L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\delta \mathbf{u}}, \mathbf{h}\right)_H, \quad L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{h} = \left(\frac{\delta L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\delta \mathbf{v}}, \mathbf{h}\right)_H.$$

Условимся о новых обозначениях:

$$\frac{\delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))}{\delta \mathbf{u}} = \frac{\delta L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\delta \mathbf{u}}\bigg|_{\mathbf{u} = \mathbf{f}(t),\ \mathbf{v} = \mathbf{f}'(t)},$$

$$\frac{\delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))}{\delta \mathbf{v}} = \frac{\delta L(t, \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\delta \mathbf{v}}\bigg|_{\mathbf{u} = \mathbf{f}(t),\ \mathbf{v} = \mathbf{f}'(t)}.$$

С их помощью получаем

$$L^*[\mathbf{f}](t)\mathbf{h} = \left(\frac{\delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))}{\delta \mathbf{u}}, \mathbf{h}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))}{\delta \mathbf{v}}, \mathbf{h}\right).$$

Таким образом, уравнение Эйлера $L[\mathbf{f}] = 0$ можно записать следующим образом:

$$\frac{\delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))}{\delta \mathbf{u}} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))}{\delta \mathbf{v}} = 0.$$

50. Примеры. Для классических механических систем, в том числе для некоторых моделей сплошных сред, уравнения движения (и граничные условия) часто выводят, вычисляя кинетическую энергию T, потенциальную энергию U, составляя функцию Лагранжа $L = T - U$ и, наконец, уравнение $L[\mathbf{f}] = 0$.

1) Струна. Найдем уравнения движения тяжелой однородной струны, подвешенной за один из концов и совершающей малые поперечные колебания в фиксированной плоскости вблизи вертикального положения равновесия. Будем предполагать, что точка подвеса также может совершать малые поперечные колебания в упомянутой плоскости и удерживается вблизи положения равновесия упругой силой (рис. 17).

Конфигурация струны описывается функцией $u:[0, l] \to \mathbf{R}$, l — длина струны. Кинетическая энергия дается интегралом

$$T(v)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho v^2(x)\,dx.$$

Потенциальная складывается из части, пропорциональной удлинению струны, коэффициент пропорциональности имеет смысл *натяжения струны* (эти слова можно рассматривать как определение того, что следует считать «струной»), и энергии отклонения точки подвеса от равновесия:

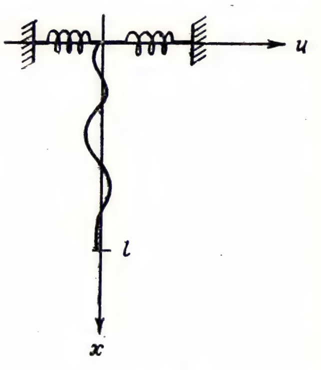


Рис. 17.

$$U(u)=\int_0^l T(x)\left[\left(1+u'^2(x)\right)^{1/2}-1\right]dx+\frac{k}{2}u^2(0).$$

Здесь $T(x)$ — натяжение струны в точке x; в данном случае натяжение создается весом струны, так что $T(x)=\rho g(l-x)$. Предположение о малости колебаний позволяет заменить разность $(1+w^2)^{\frac{1}{2}}-1$ на $\frac{1}{2}w^2$. Окончательно

$$L(u, v)=\frac{1}{2}\rho\int_0^l \left[v^2(x)-g(l-x)u'^2-(x)\right]dx - \frac{k}{2}u^2(0).$$

Таким образом, рассматриваемая механическая система представляет собою нагруженное локальное поле. Уравнение Эйлера — Остроградского имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}g(l-x)u_x(t, x)=u_{tt}(t, x),$$

оно должно сопровождаться граничными условиями

$$\rho g l u_x(t, 0)+ku(t, 0)=0, \qquad (l-x)u_x(t, x)\,|_l=0.$$

Граничное условие на свободном конце струны означает более точно, что $\lim\limits_{x\to l}(l-x)u_x(t, x)=0$.

2) Уравнения теории упругости. Конфигурация изотропного однородного упругого тела, заполняющего объем Ω, $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, описывается смещением $\mathbf{u}:\Omega\to\mathbf{R}^3$. Такое тело является локальным полем. Функция Лагранжа L для него равна

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{v})=\int_\Omega\left\{\frac{\rho}{2}\mathbf{v}^2(x)-G\left[\frac{m-1}{m-2}(\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x}))^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}(\operatorname{rot}\mathbf{u}(\mathbf{x}))^2\right]-(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}))\right\}d\mathbf{x}.$$

Здесь ρ, G и m — постоянные, характеризующие тело: ρ — *плотность*, G — *модуль сдвига*, m — *коэффициент поперечного сжатия*; $\mathbf{F}$ — заданная вектор-функция $\Omega\to\mathbf{R}^3$, *плотность внешней силы*, например *силы тяжести*. Уравнение Эйлера — Остроградского имеет вид

$$\rho\mathbf{u}_{tt}=G\left(\Delta\mathbf{u}+\frac{m}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}\right)-\mathbf{F},$$

div, grad и Δ — оператор Лапласа действуют обычным образом на вектор-функцию $\mathbf{x}\to\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Это есть *основное уравнение теории упругости*.

3) Электромагнитное поле. Конфигурация электромагнитного поля *в вакууме* в объеме Ω, $\Omega\subset\mathbf{R}^3$, описывается так называемым *4-потенциа-*

лом $A : \Omega \to \mathbf{R}^4$; электромагнитное поле является локальным полем, действие которого дается формулой

$$S_\Delta(A) = \frac{1}{4} \int_\Delta dt \int_\Omega d\mathbf{x} \, [(\nabla_\mathbf{x} A_0 - \mathbf{A}_t)^2 - (\mathrm{rot}\, \mathbf{A})^2],$$

в которой A_0 и $\mathbf{A}$ — координаты потенциала $A : A = (A_0, \mathbf{A})$, A_0 принимает числовые значения, $\mathbf{A}$ — значения в $\mathbf{R}^3$. Уравнение Эйлера — Остроградского сводится к соотношениям

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{\frac{\partial A_0}{\partial x_i}} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\frac{\partial A_i}{\partial t}} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{\frac{\partial A_i}{\partial x_j}} = 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Легко получить их явный вид:

$$\mathrm{div}\, (\nabla A_0 - \mathbf{A}_t) = 0, \; \frac{\partial}{\partial t} (-\mathbf{A}_t + \nabla A_0) - \mathrm{rot}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{A} = 0.$$

Положим $\mathbf{E} = \nabla A_0 - \mathbf{A}_t$, $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}$. Тогда

$$\mathrm{div}\, \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E}_t = \mathrm{rot}\, \mathbf{H}.$$

Из определения $\mathbf{H}$ следует, что $\mathrm{div}\, \mathbf{H} = 0$, из определения $\mathbf{E}$ следует, что $\mathrm{rot}\, (\mathbf{E} + \mathbf{A}_t) = 0$, т. е. $\mathbf{H}_t = -\mathrm{rot}\, \mathbf{E}$. Совокупность уравнений

$$\mathbf{E}_t = \mathrm{rot}\, \mathbf{H}, \qquad \mathbf{H}_t = -\mathrm{rot}\, \mathbf{E},$$
$$\mathrm{div}\, \mathbf{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\, \mathbf{H} = 0,$$

конечно, известна читателю, их принято называть *уравнениями Максвелла*. Вектор-функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ называют соответственно *напряженностью электрического и магнитного полей*.

4) Нелинейное релятивистское скалярное поле. Так называется система, конфигурация которой описывается отображением $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, а действие дается формулой

$$S_\Delta(\varphi) = \int_\Delta dt \int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\mathbf{x} \varphi)^2 - U(\varphi) \right],$$

где U — заданная функция, достаточно быстро стремящаяся к нулю, когда аргумент стремится к нулю. Уравнение $\mathcal{L}[\varphi] = 0$ имеет в этом случае вид

$$\Delta\varphi - \varphi_{tt} = U'(\varphi).$$

ГЛАВА III

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ

У построений предыдущих глав, как постоянно подчеркивалось, существуют образцы в известной читателю теории экстремумов функций одного или нескольких числовых аргументов. Такими образцами обладают не только общие идеи, но и конкретные конструкции, зависящие от специфического вида интегральных функционалов, в частности теория сопряженных точек. Ограничивая интегральные функционалы на кусочно-линейные функции, т. е. на функции, графики которых суть ломаные с конечным числом звеньев, можно непосредственно свести рассмотрение интегральных функционалов к рассмотрению функций от конечного множества числовых аргументов, в качестве которых можно взять координаты вершин графиков. Изучая подобные функции (а они не являются функциями общего вида) и исследуя предельный переход, при котором происходит измельчение звеньев ломаных, нетрудно вывести и достаточные условия экстремума для интегральных функционалов. Подобная редукция задач для интегральных функционалов к задачам теории функций от конечного числа переменных известна под названием *метода ломаных Эйлера.* Следует понимать, однако, что и теория экстремумов функций, сводящая вопрос к исследованию нулей других функций (нулей производных), и аналогичная теория экстремумов интегральных функционалов не дают прямого ответа на вопрос, обладает функция или функционал точкой экстремума. Новая задача, задача об отыскании нулей функции, нулей векторного поля или решений краевой задачи для дифференциального уравнения, может оказаться более удобной в конкретных случаях, но в целом она не проще исходной задачи.

В теории экстремумов функций известны, однако, и результаты другого характера, не зависящие от сведения экстремальной задачи к отысканию нулей производных и отвечающие на вопрос о существовании точек экстремума. К их числу принадлежит *теорема Вейерштрасса,* которая утверждает, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве в $\mathbf{R}^k$ имеет точки

абсолютного минимума и максимума. Значение этой теоремы не исчерпывается ее непосредственным содержанием. Если в условиях применимости теоремы Вейерштрасса дополнительно известно, что точка экстремума **a** — внутренняя точка области определения, а рассматриваемая функция u дифференцируема, можно утверждать, что разрешимо уравнение $u'(\mathbf{x})=0$; корнем этого уравнения является точка **a**. Теорема Вейерштрасса является очень простым, но типичным примером *теорем существования*. В анализе подобные теоремы обычно доказывают, «выдумывая» *последовательность,* предел которой дает решение задачи. Идеи, с помощью которых строятся такие последовательности, часто лежат в основе *численных процедур,* в частности процедур для приближенного отыскания точек экстремума или корней функций.

В теории экстремумов интегральных функционалов аналоги идей, примыкающих к теореме Вейерштрасса, составляют раздел, получивший название *прямых методов вариационного исчисления.* Помимо теоретических построений в прямых методах большое место занимают и *численные процедуры,* которые имеют важные и разнообразные приложения и в нематематических дисциплинах. Многие технические проблемы, возникающие в прямых методах (а таких проблем много), обычно решают, прибегая *к теории функций вещественной переменной,* что особенно относится к функционалам, аргументами которых являются функции нескольких переменных. Поэтому прямые методы, как правило, излагают либо *в курсах функционального анализа*, либо в специальных курсах. У читателя этого учебника не предполагается знания теории функций вещественной переменной. Кроме того, как сказано в Предисловии, нас интересуют в первую очередь формульный и геометрический аспекты теории стационарных точек интегральных функционалов. Теоретические построения прямых методов изложены здесь только на примере *краевой задачи Штурма — Лиувилля.* Это позволяет в целом судить о духе прямых методов и описать основные теоретические идеи, которые вообще широко используются в различных задачах математической физики, а не только в вариационном исчислении, не отягощая их техническими проблемами. Техническая сторона дела в этом случае упрощается тем, что основной функционал квадратичен, а его аргумент — функция одной числовой переменной. Впрочем и сама задача Штурма — Лиувилля независимо от возможных обобщений — трудная и содержательная задача, имеющая многочисленные приложения. Связь между задачей Штурма — Лиувилля, в том числе задачей на *собственные функции*, и экстремальными задачами выяснена в § 1. В § 2 выведен ряд следствий, среди них *уравнение замкнутости* для системы собственных функций. О содержании § 3 говорит его название — «Обобщения и связь с приближенными вычислениями». Отметим лишь, что здесь описаны также и часто применяемые эффективные вычислительные процедуры, навеянные теоретическими схемами прямых методов.

§ 1. Вариационный подход к задаче Штурма — Лиувилля

51. Неоднородная краевая задача. Пусть, как и в гл. I, l обозначает оператор Штурма — Лиувилля на интервале $\Delta: lh = -(ph')' + qh$. На протяжении всего параграфа будет предполагаться, что $p \in C^1(\Delta)$, $q \in C(\Delta)$ и $p > 0$. (*Неоднородным*) *уравнением Штурма — Лиувилля* называется уравнение $lu = f$, в котором u — подлежащая отысканию, а f — заданная функции. Функция f будет считаться непрерывной. Уравнение $lu = 0$, если необходимо подчеркнуть, что это уравнение вида $lu = f$ при $f = 0$, будет называться *однородным уравнением Штурма — Лиувилля. Функция* $u: \Delta \to \mathbf{R}$ *будет называться* (*классическим*) *решением* (*неоднородной, однородной*) *задачи Штурма — Лиувилля, если она удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля* (*соответственно*: $lu = f$, $lu = 0$) *и граничным условиям* $u(a) = 0$, $u(b) = 0$. Напомним, что через D было обозначено множество функций $u \in C^2(\Delta \to \mathbf{R})$, удовлетворяющих условиям $u(a) = 0$, $u(b) = 0$. Можно сказать, что (*классическим*) *решением задачи Штурма — Лиувилля является решение уравнения Штурма — Лиувилля, принадлежащее множеству* D. Однородная задача Штурма — Лиувилля либо имеет только *нулевое решение*, либо множество ее решений образует *одномерное подпространство*. Ясно, что *общее решение* неоднородной задачи имеет вид $u = u_0 + v$, где u_0 — какое-либо (*частное*) *решение* задачи, а v — *общее решение однородной задачи*. Сказанное не означает, что неоднородная задача обязательно имеет решение.

Множество решений задачи $u \in D$, $lu = f$ совпадает, очевидно, с множеством стационарных точек функционала I на $C_0^1(\Delta)$

$$I(u) = \int_\Delta (pu'^2 + qu^2 - 2uf)\, dt = K(u) - 2(u, f)_H.$$

Всякая точка экстремума функционала I на $C_0^1(\Delta)$ — стационарная точка. Обратное, вообще говоря, неверно. Пусть u — стационарная точка, а h — произвольная функция из $C_0^1(\Delta)$. Тогда

$$I(u+h) = I(u) + I(h) + 2B(u, h), \quad B(u, h) = \int_\Delta (pu'h' + quh)\, dt.$$

Предварительная формула Грина (формула (9) п. 23) дает $B(u, h) = (lu, h)$. Поэтому

$$I(u+h) = I(u) + 2(lu - f, h) + K(h) = I(u) + K(h).$$

Функционал K принимает сколь угодно большие положительные значения (лемма 2 п. 21), следовательно, функционал I не может иметь точек максимума. Стационарная точка является точкой минимума тогда и только тогда, когда функционал K положителен. При этом точка минимума с необходимостью — точка абсолютного минимума. Стационарная точка — точка строгого минимума тогда и только тогда, когда функционал K положительно

определен. Условия положительности и положительной определенности K были выяснены в п. 25.

Будем считать функционал K положительно-определенным. В этом случае однородная задача $u \in D$, $lu = 0$ имеет только нулевое решение. Это значит, что неоднородная задача $u \in D$, $lu = f$ имеет не более одного решения. Множество таких решений (пустое или одноэлементное множество) совпадает с множеством точек абсолютного строгого минимума функционала I на $C_0^1(\Delta)$.

Задача I. *Имеет ли функционал I на $C_0^1(\Delta)$ точку минимума?*

Теорема I. *Ответ на вопрос, поставленный в задаче* I, *положителен.*

Утверждение теоремы равносильно разрешимости задачи $u \in D$, $lu = f$. Доказательство теоремы и сформулированной ниже существенно более сложной теоремы II будет дано в настоящем параграфе с помощью прямых методов вариационного исчисления.

Конечно, прямые методы вариационного исчисления не единственный и даже не простейший путь получения разрешимости неоднородной краевой задачи. Быстрее приводит к цели попытка найти решение в виде $u = u_0 + cv$, где u_0 — решение неоднородной задачи Коши $lu_0 = f$, $u_0(a) = 0$, $u_0'(a) = 1$, v — решение однородной задачи Коши $lv = 0$, $v(a) = 0$, $v'(a) = 1$, c — подлежащее определению число. На этом пути можно без труда получить более полный результат: *для разрешимости задачи $u \in D$, $lu = f$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $(f, w)_H = 0$, где w — произвольное решение однородной задачи $w \in D$, $lw = 0$.* При рассмотрении задачи на собственные функции и собственные значения, к обсуждению которой мы переходим, прямые методы, может быть, — наиболее естественный аппарат.

52. Собственные значения и собственные функции. Предположим, что в коэффициент q оператора Штурма — Лиувилля введен вещественный параметр $\lambda : q \to q - \lambda$. В этом случае однородное уравнение Штурма — Лиувилля записывается следующим образом:

$$lu = \lambda u.$$

Параметр λ называется *спектральным. Те значения спектрального параметра, при которых существуют ненулевые решения однородной задачи $u \in D$, $lu = \lambda u$, называются собственными значениями оператора Штурма — Лиувилля.* Сами эти ненулевые решения называются *собственными функциями оператора Штурма — Лиувилля.* Множество собственных функций, отвечающих данному собственному значению, имеет вид $u = cu_0$, где u_0 — фиксированная собственная функция, а c — произвольная ненулевая постоянная. Этот факт принято выражать так: каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до нормировки собственная функция. Собственная функция u называется *нормированной*, если выполняется соотношение $(u, u)_H = \|u\|_H^2 = 1$. Это условие фиксирует собственную функцию с точностью до знака. Итак, *каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до знака нормированная собственная функция.*

Собственные функции u_1 и u_2, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, иначе говоря, выполняется соотношение $(u_1, u_2)=0$. Доказательство ортогональности опирается на *формулу Грина* ((10), п. 23)

$$(u_1, lu_2)-(lu_1, u_2)=p(u_1'u_2-u_1u_2')|_\Delta.$$

В формуле Грина предполагается, что $u_1, u_2 \in C^2(\Delta)$. Если u_1 и $u_2 \in D$, то формула Грина принимает вид

$$(lu_1, u_2)=(u_1, lu_2).$$

Пусть u_1 и u_2 — собственные функции, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Формула Грина дает

$$0=(lu_1, u_2)-(u_1, lu_2)=\lambda_1(u_1, u_2)-\lambda_2(u_1, u_2)=(\lambda_1-\lambda_2)(u_1, u_2).$$

Ортогональность собственных функций доказана.

Отметим еще одну формулу. Пусть u — нормированная собственная функция; тогда справедливо равенство

$$K(u)=\lambda,$$

где λ — соответствующее собственное значение. В самом деле,

$$K(u)=(u, lu)+pu'u|_\Delta=(u, lu)=\lambda\|u\|^2=\lambda.$$

53. Вариационное описание собственных значений и собственных функций. Для вариационного описания нам понадобится следующий факт, относящийся к собственным значениям оператора Штурма — Лиувилля.

Описание множества собственных значений. *Собственные значения оператора Штурма — Лиувилля можно перенумеровать натуральными числами в порядке возрастания.* Иначе говоря, *существует числовая последовательность* (λ_n), *члены которой совпадают с собственными значениями и исчерпывают их, причем* $\lambda_n<\lambda_{n+1}$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

Обозначим через φ_n нормированную собственную функцию, отвечающую собственному значению λ_n, и условимся считать, что собственные значения перенумерованы в соответствии с неравенством $\lambda_n<\lambda_{n+1}$.

Пример. Пусть $lu=-u''$ и $\Delta=[0, \pi]$. В этом случае решения уравнения $lu=\lambda u$, удовлетворяющие условию $u(0)=0$, имеют вид $u(t)=c\sin\sqrt{\lambda}t$, где c — произвольная постоянная. Требование $u(\pi)=0$ эквивалентно тому, что $\sqrt{\lambda}$ — целое число. Таким образом, собственные значения суть $\lambda_n=n^2$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Соответствующие нормированные собственные функции φ_n имеют вид

$$\varphi_n(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nt.$$

Вариационное описание. *Собственная функция* φ_{n+1} *является точкой абсолютного условного минимума функционала* K

в пространстве $C_0^1(\Delta)$ *при условиях* $(u, u)=1$, $(u, \varphi_1)=0$, ..., $(u, \varphi_n)=0$. *При этом* $K(\varphi_{n+1})=\lambda_{n+1}$.

На этот раз функционал K не предполагается положительно-определенным. Вариационное описание сохраняет смысл и при $n=0$, если договориться в этом случае оставлять в списке условий единственное: $(u, u)=1$.

И только что сформулированное утверждение и предшествующее ему описание множества собственных значений будут получены как результат изучения следующей задачи.

Задача II. *Предположим, что существуют* n *наименьших собственных значений* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *оператора Штурма — Лиувилля, так что любое отличное от них собственное значение* λ *(если оно существует) удовлетворяет неравенствам* $\lambda_k < \lambda$, $k=1, \ldots, n$. *Обозначим через* φ_k, $k=1, \ldots, n$, *нормированную собственную функцию, отвечающую собственному значению* λ_k. *Спрашивается; существует ли в пространстве* $C_0^1(\Delta)$ *точка абсолютного минимума функционала* K *при условиях* $(u, u)=1$, $(u, \varphi_k)=0$, $k=1, \ldots, n$.

Ниже с помощью прямых методов будет доказана

Теорема II. *Ответ на вопрос, поставленный в задаче* II, *положителен.*

И в задаче и в теореме следует считать $n=0, 1, \ldots$, сохраняя при $n=0$ в формулировке задачи лишь условие $(u, u)=1$.

Убедимся, что вариационное описание вытекает из теоремы II. Достаточно, конечно, проверить, что точка абсолютного условного минимума, существование которой устанавливается в теореме, является собственной функцией оператора Штурма — Лиувилля, отвечающей собственному значению, наименьшему во множестве собственных значений, отличных от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В частности, при $n=0$ точка абсолютного условного минимума является собственной функцией, отвечающей наименьшему собственному значению. Условимся об обозначениях. Введем функционалы $G_0, G_1, \ldots, G_n$, положив $G_0(u)=\|u\|^2-1$, $G_k(u)=2(u, \varphi_k)$, $k=1, \ldots, n$, и отображение $G: C^1(\Delta)\to \mathbf{R}^{n+1}$, $G(u)=(G_0(u), G_1(u), \ldots, G_n(u))$. Тогда весь список условий запишется как уравнение $G(u)=0$. Обозначим через u точку абсолютного условного минимума в задаче II. Дифференциал отображения G в точке u имеет вид $dG(u; h)=$ $=2((h, u), (h, \varphi_1), \ldots, (h, \varphi_n))$. Функции $(u, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ попарно ортогональны и не равны нулю. Для функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ это следует из определения и далее для всей системы это вытекает из условия $G(u)=0$. Задавшись произвольным вектором $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получим

$$dG\left(u;\ \alpha_0 u+\sum\nolimits_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)=2\boldsymbol{\alpha}.$$

Поэтому значения отображения $h\to dG(u; h)$ пробегают все пространство $\mathbf{R}^{n+1}$. Как следствие (см. п. 38) существуют такие числа $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n$, что функция u — стационарная точка функционала

$$K-\lambda G_0-\sum\nolimits_{k=1}^{n}\mu_k G_k.$$

Следовательно, функция u принадлежит пространству $C^2(\Delta)$ и удовлетворяет уравнению Эйлера

$$lu = \lambda u + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \varphi_k.$$

Отсюда $(lu, \varphi_k) = \lambda(u, \varphi_k) + \mu_k(\varphi_k, \varphi_k)$, $k = 1, \ldots, n$. По условию $(u, \varphi_k) = 0$. Кроме того, в силу формулы Грина $(lu, \varphi_k) = (u, l\varphi_k) = \lambda_k(u, \varphi_k) = 0$. Поэтому $\mu_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, так что функция u удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля $lu = \lambda u$ и тем самым является нормированной собственной функцией, отвечающей собственному значению λ.

На произвольной нормированной собственной функции функционал K равен собственному значению. Это значит, что точка абсолютного условного минимума u является собственной функцией, отвечающей минимальному собственному значению в множестве всех собственных значений, характеризуемых условиями $(u, \varphi_1) = 0, \ldots, (u, \varphi_n) = 0$, т. е. во множестве всех собственных значений, отличных от наименьших собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Итак, обоснование вариационного описания, действительно, сводится к доказательству теоремы II.

Из теоремы II, независимо от приведенного в начале параграфа описания множества собственных значений, вытекает также, что множество собственных значений оператора Штурма — Лиувилля содержит бесконечную возрастающую последовательность $(\tilde{\lambda}_n)$. Последовательность $(\tilde{\lambda}_n)$ соответствует последовательности основных задач при $n = 0, 1, \ldots$. Из конструкции последовательности $(\tilde{\lambda}_n)$ следует, что всякое собственное значение λ, не вошедшее в эту последовательность, должно удовлетворять условию $\tilde{\lambda}_n < \lambda$ при всех n. В конце параграфа будет доказана

Теорема (о структуре множества собственных значений). *Справедливо предельное соотношение $\tilde{\lambda}_n \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Отсюда будет вытекать, что члены последовательности $(\tilde{\lambda}_n)$ исчерпывают все множество собственных значений. Этим, в частности, будет оправдано изложенное выше описание множества собственных значений.

54. Сходящаяся последовательность. Доказательству теорем I и II будет предпослан ряд вспомогательных построений. Мы остановимся на этих построениях подробнее, чем это нужно для формального доказательства теорем I и II, так как они имеют и самостоятельное значение.

Теоремы существования типа теоремы Вейерштрасса доказываются обычно путем построения последовательностей, которые должны сходиться к изучаемому объекту. Говорят, что *на множестве E задана последовательность, если каждому натуральному числу m, $m = 1, 2, \ldots$, поставлен в соответствие определенный элемент множества E.* Обозначим через $\mathbf{x}_m$ элемент, сопоставленный числу m. Соответствующую последовательность принято обо-

значать $(\mathbf{x}_m)$. *Последовательность* $(\mathbf{x}_m)$ *на метрическом пространстве* E *называется сходящейся, если существует такой элемент* $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in E$, *что нуль является пределом последовательности чисел* $(d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}))$: $\lim\limits_{m \to \infty} d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) = 0$. Элемент $\mathbf{a}$ определяется сходящейся последовательностью однозначно. Действительно, если

$\lim\limits_{m \to \infty} d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) = 0$ и $\lim\limits_{m \to \infty} d(\mathbf{x}_m, \mathbf{b}) = 0$, то

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant d(\mathbf{a}, \mathbf{x}_m) + d(\mathbf{x}_m, \mathbf{b}) = d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) + d(\mathbf{x}_m, \mathbf{b}),$$

причем левая сторона неотрицательна, а правая при $m \to \infty$ стремится к нулю. Это возможно лишь при $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, т. е. при $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Элемент $\mathbf{a}$, фигурирующий в определении сходящейся последовательности $(\mathbf{x}_m)$: $\lim\limits_{m \to \infty} d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) = 0$, называют *пределом последовательности* $(\mathbf{x}_m)$ и пишут $\lim\limits_{m \to \infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{a}$, или $\mathbf{x}_m \to \mathbf{a}$ при $m \to \infty$.

Пусть $F: E \to \tilde{E}$ — непрерывное отображение метрического пространства E в метрическое пространство $\tilde{E}$, а $(\mathbf{x}_m)$ — сходящаяся последовательность в E: $\mathbf{x}_m \to \mathbf{a}$ при $m \to \infty$. Тогда $F(\mathbf{x}_m) \to F(\mathbf{a})$ при $m \to \infty$. Так как нормированное пространство является метрическим, определения сходящейся последовательности и предела последовательности действуют и в этом пространстве.

Пусть (f_m) — сходящаяся последовательность в пространстве $C(\Delta)$. Это значит, что существует такая функция f, предел последовательности, что

$$\| f_m - f \| = \sup_{t \in \Delta} | f_m(t) - f(t) | \to 0$$

при $m \to \infty$. Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что *сходимость последовательности* (f_m) *в пространстве* $C(\Delta)$ *эквивалентна равномерной сходимости последовательности* (f_m) *на интервале* Δ. Если (f_m) — сходящаяся последовательность в пространстве $C^1(\Delta)$, то (f_m) — сходящаяся последовательность в пространстве $C(\Delta)$, причем предел последовательности (f_m) в пространстве $C(\Delta)$ равен пределу последовательности в пространстве $C^1(\Delta)$. Это утверждение следует из оценки $\| f_m - f \|_C \leqslant \| f_m - f \|_{C^1}$. Аналогичное соотношение имеется между сходимостями в пространствах $H^1(\Delta)$ и $H(\Delta)$, $C^1(\Delta)$ и $H^1(\Delta)$, $C(\Delta)$ и $H(\Delta)$.

55. Полнота пространства. Принципиальный вопрос, имеющий существенное значение при доказательстве теорем существования, это вопрос о том, *как узнать по заданной последовательности, является она сходящейся или нет*. Для последовательностей в пространстве $\mathbf{R}$, т. е. числовых последовательностей, известен следующий *критерий Коши. Для того чтобы числовая последовательность* (x_m) *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного числа* ε *существовало такое число* N, *что* $|x_n - x_m| < \varepsilon$ *при* n, $m > N$. Аналогичное утверждение в произвольном метрическом пространстве является лишь необходимым.

Условимся называть последовательность $(\mathbf{x}_m)$ в метрическом пространстве *фундаментальной*, если для каждого положительного числа ε существует такое число N, что $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \varepsilon$ при n, $m > N$. Докажем, что *сходящаяся последовательность является фундаментальной*. Так как последовательность $(\mathbf{x}_m)$ — сходящаяся, то существует такой элемент $\mathbf{a}$, что для каждого положительного ε $d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) < \varepsilon/2$ при $m > N$. Отсюда $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) \leqslant d(\mathbf{x}_n, \mathbf{a}) + d(\mathbf{x}_m, \mathbf{a}) < \varepsilon$ при n, $m > N$. Обратное в общем случае неверно: не всякая фундаментальная последовательность является сходящейся. Такие *метрические*, а следовательно, *нормированные и евклидовы пространства, в которых всякая фундаментальная последовательность является сходящейся, называются полными пространствами. Полное нормированное пространство называется банаховым, полное евклидово — гильбертовым*. В полном пространстве совпадают классы сходящихся последовательностей и фундаментальных последовательностей.

Простейшим примером полного пространства является пространство $\mathbf{R}$. Полным является также пространство $\mathbf{R}^n$ при любом n. Примерами полных функциональных пространств служат $C(\Delta)$, $C^1(\Delta)$, $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, $C(D)$, $C^1(D)$ и т. п. Напротив, пространства $H(\Delta)$, $H^1(\Delta)$ и т. п. не полны. Мы не будем подробно обсуждать все пространства из этого списка. Убедимся, однако, что пространство $C(\Delta)$ является, а пространство $H(\Delta)$ не является полным.

Пусть (f_m) — фундаментальная последовательность в пространстве $C(\Delta)$. Это означает, что для любого положительного числа ε найдется такое число N, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ при n, $m > N$. По определению нормы в $C(\Delta)$ $\sup\limits_{t \in \Delta} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ при n, $m > N$. Отсюда для любого $t \in \Delta$ $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ при n, $m > N$. Фиксировав число t, получим фундаментальную последовательность $(f_m(t))$ в $\mathbf{R}$. Обозначим ее предел $u(t)$. Убедимся, что функция u, определенная соотношением $t \to u(t)$, является пределом последовательности (f_m) в пространстве $C(\Delta)$. Обратимся вновь к неравенству $|f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ при n, $m > N$. Удерживая t фиксированным, устремим номер m к бесконечности. Тогда $|f_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ при $n > N$ (и любом $t \in \Delta$). Последнее неравенство, конечно, означает, что для любого ε найдется такое N, что $|f_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ при $n > N$ (и любом $t \in \Delta$). Таким образом, установлена равномерная на интервале Δ сходимость последовательности функций (f_m) к предельной функции u. Отсюда следует, что функция u принадлежит пространству $C(\Delta)$. Остается заметить, что $\|f_n - u\| = \sup\limits_{t \in \Delta} |f_n(t) - u(t)| < \varepsilon$ при $n > N$. Итак, доказано, что фундаментальная последовательность (f_m) в пространстве $C(\Delta)$ является сходящейся.

Чтобы убедиться, что пространство $H(\Delta)$ — не полное пространство, в нем следует построить фундаментальную последовательность, не являющуюся схо-

дящейся. Рассмотрим в $H[-1, 1]$ последовательность (f_m), положив

$$f_m(t)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant t\leqslant 0, \\ mt, & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{m}, \\ 1, & \frac{1}{m}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

Введем разрывную функцию f:

$$f(t)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant t\leqslant 0, \\ 1, & 0<t\leqslant 1, \end{cases}$$

не принадлежащую пространству $H[-1, 1]$. Дополним пространство $H[-1, 1]$ функциями, имеющими точки разрыва первого рода, сохранив прежнюю формулу для нормы. Обозначим новое пространство через $\hat{H}[-1, 1]$. Ясно, что $f\in\hat{H}$, причем

$$\|f_m-f\|^2_{\hat{H}}=\int_0^{\frac{1}{m}}|mt-1|^2\,dt=(3m)^{-1}.$$

Поэтому в пространстве $\hat{H}$ последовательность (f_m) сходится и является тем самым фундаментальной. Но так как $\|f_n-f_m\|_H=\|f_n-f_m\|_{\hat{H}}$, то последовательность (f_m) является фундаментальной и в пространстве H. С другой стороны, она не является сходящейся в пространстве H, ибо ее предел в пространстве $\hat{H}$ (единственный) не принадлежит пространству H.

56. Минимизирующая последовательность. Источником для построения последовательности, которая должна сходиться к точке абсолютного (может быть, условного) минимума функционала, является так называемая *минимизирующая последовательность*. Пусть функционал I задан на множестве M. *Если существует такое число c, что $I(\mathbf{x})\geqslant c$ при $\mathbf{x}\in M$, то говорят, что функционал (на множестве M) полуограничен снизу.* В этом случае множество значений функционала имеет точную нижнюю границу, обозначим ее μ. Число μ принято называть *точной нижней границей функционала.* В соответствии с определением точной нижней границы существует такая последовательность $(\mathbf{x}_m)$, элементы которой принадлежат множеству M, что $I(\mathbf{x}_m)\to\mu$ при $m\to\infty$. Подобная последовательность (конечно, не единственная) и называется *минимизирующей.*

Покажем, что *минимизирующие последовательности в экстремальных задачах* I *и* II *существуют.* Для этого в задаче I следует убедиться, что функционал полуограничен снизу на $C_0^1(\Delta)$. Так как в задаче I функционал K предполагается положительно-определенным, то $K(u)\geqslant\mu\|u\|^2_{H^1}=\mu\int_\Delta(u'^2+u^2)\,dt$ (см. п. 25, теорема 3). Далее при любом $\varepsilon>0$ $2|fu|\leqslant\varepsilon u^2+\frac{1}{\varepsilon}f^2$, поэтому

$$2|(f, u)|=2\left|\int_\Delta f(t)\,u(t)\,dt\right|\leqslant\int_\Delta[\varepsilon u^2(t)+\varepsilon^{-1}f^2(t)]\,dt.$$

Положим $\varepsilon = {}^1/_2\mu$, тогда

$$I(u) = K(u) - 2(u, f) \geqslant \mu \int_\Delta (u'^2 + u^2)\,dt -$$
$$- \int_\Delta (\mu/2u^2 + 2/\mu f^2)\,dt \geqslant \mu/2 \|u\|^2_{H^1} - 2/\mu \|f\|^2_H \geqslant -2\mu^{-1}\|f\|^2_H. \qquad (1)$$

Правая сторона не зависит от u. Полуограниченность снизу функционала I установлена.

В задаче II функционал K не предполагался положительным. Следует убедиться в его полуограниченности снизу на множестве функций u из $C_0^1(\Delta)$, удовлетворяющих условиям $(u, u) = 1$, $(u, \varphi_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Полуограниченность снизу функционала имеет место на более широком множестве $\{u : u \in C^1, (u, u)_H = 1\}$:

$$K(u) = \int_\Delta (pu'^2 + qu^2)\,dt \geqslant \min_\Delta p \int_\Delta u'^2\,dt + \min_\Delta q \int_\Delta u^2\,dt =$$
$$= \min p \|u\|^2_{H^1} + (\min q - \min p) \int_\Delta u^2\,dt =$$
$$= \min p \|u\|^2_{H^1} + (\min q - \min p) \qquad (2)$$

и, таким образом, $K(u) \geqslant \min\limits_\Delta q - \min\limits_\Delta p$. Правая сторона не зависит от u. Полуограниченность функционала K установлена.

57. Компактные множества. Ожидать, что минимизирующая последовательность сходится, в общем случае нельзя. Даже множество точек абсолютного минимума функции $f : \Delta \to \mathbf{R}$ не обязательно состоит из одного элемента, а последовательность, составленная из этих точек, конечно, является минимизирующей. И при доказательстве классической теоремы Вейерштрасса и в нашей задаче к цели приводит идея компактности, которая, вообще, является одной из основных идей анализа и широко используется при доказательстве разнообразных теорем существования.

Множество в полном метрическом пространстве называется компактным, если любая последовательность, состоящая из элементов этого множества, содержит сходящуюся подпоследовательность. *

Если $(\mathbf{x}_m)$ — *последовательность, то подпоследовательностью (содержащейся в ней), как обычно, называют произвольную последовательность вида* $(\mathbf{x}_{k_m})$, *где* (k_m) — *какая-либо последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию монотонности* $k_m < k_{m+1}$ *при любом* m. Из определения непосредственно следует, что подмножество компактного множества есть множество компактное. Читателю известно, что *всякое ограниченное множество в* $\mathbf{R}^n$ *является компактным.* Этот факт играет решающую роль при доказательстве теоремы Вейерштрасса. Предел последовательности, фигурирующей в определении компактного множества, не обязан принадлежать этому множеству.

---

*Множества, которые мы назвали компактными, следовало бы в соответствии с более общей терминологией называть относительно компактными. В дальнейшем мы будем опускать слово «относительно».

По аналогии с множествами в пространстве $\mathbf{R}^n$ *назовем множество в метрическом пространстве замкнутым, если ему принадлежат пределы всех сходящихся последовательностей, состоящих из элементов этого множества.*

Непосредственное обобщение теоремы Вейерштрасса таково: *пусть D — замкнутое компактное множество в метрическом пространстве. Всякий непрерывный функционал $I: D \to \mathbf{R}$ имеет на множестве D точку абсолютного минимума.*

Докажем, что *функционал I ограничен*, т. е. существует такое число c, что $|I(\mathbf{x})| \leqslant c$ при всех $\mathbf{x} \in D$. Рассуждая от обратного, предположим, что функционал I не ограничен. Тогда найдется такая последовательность $(\mathbf{x}_m)$ элементов множества D, что $\lim\limits_{m\to\infty} I(\mathbf{x}_m) = \infty$. Благодаря компактности D из последовательности $(\mathbf{x}_m)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $(\mathbf{x}_{k_m})$. При этом должно выполняться соотношение $\lim\limits_{m\to\infty} I(\mathbf{x}_{k_m}) = I(\mathbf{в})$, где $\mathbf{в} = \lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_{k_m}$. Это соотношение противоречит, однако, выбору последовательности $(\mathbf{x}_m)$. Установленное противоречие и доказывает ограниченность функционала I. Из ограниченности следует существование точной нижней границы μ функционала I и минимизирующей последовательности $(\mathbf{y}_m)$: $\lim\limits_{m\to\infty} I(\mathbf{y}_m) = \mu$. Последовательность $(\mathbf{y}_m)$ содержит сходящуюся подпоследовательность $(\mathbf{y}_{k_m})$, обозначим через $\mathbf{в}$ ее предел. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} I(\mathbf{y}_{k_m}) = I(\mathbf{в})$. Следовательно, $I(\mathbf{в}) = \mu$ и по определению числа μ выполнено неравенство $I(\mathbf{в}) \leqslant I(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ — любой элемент множества D. Таким образом, $\mathbf{в}$ — точка абсолютного минимума функционала.

Столь же непосредственно применить идею компактности в задачах вариационного исчисления не удается. Основная причина затруднений связана с тем, что минимизирующая последовательность для интегральных функционалов не является, вообще говоря, компактной в исходном пространстве, например в C_0^1. Она оказывается, однако, компактной в некоторых пространствах с более слабыми нормами, например в пространстве C. Хотя такой ослабленной компактности в конечном счете оказывается достаточно для наших целей, в доказательстве теоремы существования, естественно, появляются дополнительные моменты.

К о м п а к т н о с т ь м и н и м и з и р у ю щ е й п о с л е д о в а т е л ь н о с т и. Обратимся к описанию компактных множеств в пространстве C. Начнем с определений.

Множество M в нормированном пространстве назовем ограниченным, если существует такое число c, что $\|\mathbf{x}\| \leqslant c$ для всех $\mathbf{x} \in M$. Множество M функций $f: \Delta \to \mathbf{R}$ называется множеством равностепенно-непрерывных функций, если для любого положительного числа ε существует такое число δ, что

$$|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$$

для всех $t_1, t_2 \in \Delta$ *таких, что* $|t_1 - t_2| < \delta$, *и для всех* $f \in M$. Ясно, что функции, входящие в множество равностепенно-непрерывных функций, непрерывны и, более того, *равномерно непрерывны* на Δ. Особо следует обратить внимание на то, что число δ может быть выбрано одним и тем же *для всех функций* f.

Теорема Арцела. *Ограниченное множество в пространстве* $C(\Delta)$, *состоящее из равностепенно-непрерывных функций, компактно в* $C(\Delta)$.

Доказательство теоремы см. в [3]. Отметим, что описанные в теореме Арцела достаточные условия компактности в действительности и необходимы. Мы не будем, однако, пользоваться этим фактом.

Следствие. *Ограниченное множество* M *функций пространства* $H^1(\Delta)$ *компактно в пространстве* $C(\Delta)$.

Убедимся, что для элементов множества M выполнены условия теоремы Арцела. Воспользуемся оценкой

$$|f(t_2) - f(t_1)|^2 = \left|\int_{t_1}^{t_2} f'(t)\,dt\right|^2 \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} f'^2 dt \int_{t_1}^{t_2} 1\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant |t_2 - t_1| \int_\Delta f'^2(t)\,dt \leqslant |t_2 - t_1|\, \|f\|^2_{H^1}.$$

По условию существует такая постоянная, что $\|f\|_{H^1} \leqslant N$ для всех $f \in M$. Поэтому

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqslant N\,|t_2 - t_1|^{1/2}.$$

Отсюда следует равностепенная непрерывность функций множества M. Кроме того,

$$|f(t_1)| \leqslant |f(t_1) - f(t_2)| + |f(t_2)| \leqslant$$
$$\leqslant |t_2 - t_1|^{1/2} \|f\|_{H^1} + |f(t_2)| \leqslant |\Delta|^{1/2} \|f\|_{H^1} + |f(t_2)|,$$

следовательно,

$$\|f\|_C \leqslant |\Delta|^{1/2} \|f\|_{H^1} + |f(t_2)|.$$

Проинтегрируем это неравенство по t_2:

$$|\Delta|\,\|f\|_C \leqslant |\Delta|^{3/2} \|f\|_{H^1} + \int_\Delta |f(t_2)|\,dt_2 \leqslant |\Delta|^{3/2} \|f\|_{H^1} +$$
$$+ \left(\int_\Delta dt\right)^{1/2} \left(\int_\Delta f^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant |\Delta|^{3/2} \|f\|_{H^1} + |\Delta|^{1/2} \|f\|_{H^1} =$$
$$= |\Delta|\,(|\Delta|^{-1/2} + |\Delta|^{1/2})\,\|f\|_{H^1},$$

так что $\|f\|_C \leqslant (|\Delta|^{-1/2} + |\Delta|^{1/2})\,\|f\|_{H^1}$. Таким образом, множество M и ограничено в пространстве $C(\Delta)$. Условия теоремы Арцела проверены.

Покажем, что *произвольная минимизирующая последовательность* (f_m) *для задач* I *и* II *компактна в* $C(\Delta)$.

Для этого достаточно проверить, что последовательность (f_m) — ограниченное множество в H^1. При доказательстве полуограниченности функционала I в задаче I было показано (1), что

$$I(u) \geqslant \mu/2\,\|u\|^2_{H^1} - 2/\mu\,\|f\|^2_H,$$

где μ — некоторое положительное число. На минимизирующей последовательности $I(f_m) \leqslant c$. Поэтому

$$\|f_m\|^2_{H^1} \leqslant 2c\mu^{-1} + 4\mu^{-2}\|f\|^2_H.$$

Отсюда и следует ограниченность последовательности (f_m) в H^1.

При доказательстве полуограниченности функционала K, связанного с задачей II, было показано (2), что

$$K(u) \geqslant \min_\Delta p \|u\|^2_{H^1} + \left(\min_\Delta q - \min_\Delta p\right).$$

На минизирующей последовательности $K(f_m) \leqslant c$. Поэтому

$$\|f_m\|^2_{H^1} \leqslant \left(\min_\Delta p\right)^{-1} \left(c + \min_\Delta p - \min_\Delta q\right).$$

Отсюда следует ограниченность последовательности (f_m) в H^1.

58. Обобщенное решение. Итак, минимизирующие последовательности в экстремальных задачах I и II — компактные множества в $C(\Delta)$. Выбрав из них сходящиеся в C подпоследовательности, вновь получим минимизирующие последовательности — подпоследовательность минимизирующей последовательности есть минимизирующая последовательность. Следовательно, в задачах I и II существуют минимизирующие последовательности (f_m) (сохраняем прежнее обозначение), сходящиеся в $C(\Delta)$. Для пределов той и другой последовательности используем общее обозначение — u: $\lim\limits_{m \to \infty} f_m = u$. Есть все основания предполагать, что u — точка абсолютного минимума в соответствующей задаче, но это еще предстоит доказать. Если бы было известно, что $u \in C^1_0(\Delta)$ и $f_m \to u$ при $m \to \infty$ в пространстве $C^1(\Delta)$ или хотя бы в $H^1(\Delta)$, цель была бы достигнута с помощью тех же построений, что и при доказательстве теоремы Вейерштрасса (см. п. 57). Фактически u принадлежит даже классу C^2, но доказательство этого требует специальных построений. Эти построения связаны с еще одной новой идеей — понятием *обобщенного решения*.

Пусть v — классическое решение задачи Штурма — Лиувилля: $v \in D$, $lv = f$. Из уравнения следует $(lv, \zeta) = (f, \zeta)$. Будем считать, что $\zeta \in D$. Формула Грина дает

$$(v, l\zeta) = (f, \zeta), \text{ подробнее } \int_\Delta (vl\zeta - f\zeta)\,dt = 0. \tag{3}$$

Функция v, принадлежащая пространству $C(\Delta)$, называется обобщенным решением задачи $lv = f$, $v(a) = 0$, $v(b) = 0$, если для любой функции ζ, $\zeta \in D$, выполняется (3).

Следует понимать, что в этом определении словосочетание «обобщенное решение задачи $lv = f$, $v(a) = 0$, $v(b) = 0$» является условностью, так как функция v предполагается лишь непрерывной и для нее лишено непосредственного смысла выражение lv. Факт, который мы сейчас установим, может показаться неожиданным.

Понятия обобщенного и классического решений задачи $lv=f$, $v(a)=0$, $v(b)=0$ *эквивалентны.*

То, что классическое решение является обобщенным, установлено выше. Покажем, что обобщенное решение является классическим. Это будет сделано с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые в п. 8 привели к доказательству того, что стационарная точка интегрального функционала в C^1 принадлежит классу C^2. Преобразуем интеграл, фигурирующий в определении обобщенного решения, с помощью интегрирования по частям:

$$0=\int_\Delta (vl\zeta-f\zeta)\,dt=\int_\Delta(-vp\zeta''-vp'\zeta'+vq\zeta-f\zeta)\,dt=$$
$$=\int_\Delta(-vp+j_1+j_2)\,\zeta''\,dt-(j_1+j_2)\,\zeta'\,|_\Delta.$$

Здесь положено $j_1'=vp'$, $j_2''=vq-f$. Ограничивая класс функций ζ, будем предполагать, что $\zeta'(a)=0$, $\zeta'(b)=0$; тогда

$$\int_\Delta(-vp+j_1+j_2)\,\zeta''dt=0.$$

Ссылка на обобщенную лемму Дюбуа — Реймона (см. п. 7) дает $-v(t)\,p(t)+j_1(t)+j_2(t)=\alpha t+\beta$, где α и β — некоторые числа. Так как функции j_1 и j_2 принадлежат $C^1(\Delta)$, то $vp\in C^1(\Delta)$. Поэтому $-(vp)'+j_1'+j_2'=\alpha$, т. е. $-pv'+j_2'=\alpha$. Так как $j_2'\in C^1(\Delta)$, то $pv'\in C^1(\Delta)$, а значит, $v\in C^2(\Delta)$. Поэтому $-(pv')'+j_2''=0$, т. е. $lv=f$. Остается проверить граничные условия. Учитывая, что $v\in C^2$ и удовлетворяет уравнению $lv=f$, еще раз преобразуем определяющий интеграл:

$$0=\int_\Delta(vl\zeta-f\zeta)\,dt=-pv\zeta'\,|_\Delta,$$

уже не предполагая, что $\zeta'(a)=0$, $\zeta'(b)=0$. Ввиду произвольности чисел $\zeta'(a)$ и $\zeta'(b)$ приходим, наконец, к граничным условиям $v(a)=0$, $v(b)=0$. Итак, эквивалентность понятий обобщенного и классического решений доказана.

59. Интегральное тождество.

Завершение доказательства теоремы I. Обозначим точную нижнюю границу функционала I в задаче I через μ. Пусть (f_m) — минимизирующая последовательность, а u — ее предел в $C(\Delta)$. Если $\zeta\in D$, $\tau\in\mathbf{R}$, то по определению $\mu: I(f_m+\tau\zeta)\geqslant\mu$. Значение функционала I на сумме функций было выписано в п. 51:

$$I(f_m+\tau\zeta)=I(f_m)+K(\tau\zeta)+2B(f_m,\ \tau\zeta)-2(\tau\zeta,f)=$$
$$=I(f_m)+2\tau\,[(l\zeta,\ f_m)-(f,\ \zeta)]+\tau^2K(\zeta).$$

Отсюда $I(f_m)+2\tau\,[(l\zeta,\ f_m)-(f,\ \zeta)]+\tau^2K(\zeta)\geqslant\mu$. Ввиду произвольности τ это означает $[(l\zeta,\ f_m)-(f,\ \zeta)]^2\leqslant K(\zeta)\,(I(f_m)-\mu)$. Так как $I(f_m)\to\mu$ при $m\to\infty$, то $(l\zeta,f_m)\to(f,\zeta)$. При $m\to\infty$ f_m сходится к u в пространстве $C(\Delta)$, поэтому интеграл $(l\zeta,\ f_m)$ при $m\to\infty$ сходится к $(l\zeta,\ u)$. Следовательно, $(l\zeta,\ u)=(\zeta,\ f)$. Таким образом, u — обобщенное решение задачи $lu=f$, $u(a)=0$, $u(b)=0$. Но это

значит, что u — классическое решение задачи $u \in D$, $lu = f$. Из разрешимости задачи $u \in D$, $lu = f$ следует (см. п. 52) теорема I.

Завершение доказательства теоремы II. Обозначим точную нижнюю границу функционала K в задаче II при данном n через μ_n. Пусть (f_m) — минимизирующая последовательность, а u — ее предел в $C(\Delta)$. Пусть $\zeta \in D$ и $(\zeta, \varphi_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, тогда при любом $\tau \in \mathbf{R}$

$$K(f_m + \tau\zeta) \geqslant \mu_n \|f_m + \tau\zeta\|_H^2. \tag{4}$$

Действительно, если $f_m + \tau\zeta = 0$, то неравенство очевидно. Если $f_m + \tau\zeta \neq 0$, то функция $\varphi = \|f_m + \tau\zeta\|^{-1}(f_m + \tau\zeta)$ принадлежит C_0^1 и удовлетворяет условиям $(\varphi, \varphi) = 1$, $(\varphi, \varphi_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $K(\varphi) \geqslant \mu$, откуда и вытекает (4). Запишем это неравенство подробнее:

$$K(f_m) - \mu_n \|f_m\|^2 + 2\tau[B(f_m, \zeta) - \mu_n (f_m, \zeta)] + \tau^2[K(\zeta) - \mu_n \|\zeta\|^2] \geqslant 0.$$

Ввиду произвольности τ

$$[B(f_m, \zeta) - \mu_n(f_m, \zeta)]^2 \leqslant [K(\zeta) - \mu_n \|\zeta\|^2][K(f_m) - \mu_n \|f_m\|^2].$$

Так как $\|f_m\| = 1$, то $K(f_m) - \mu_n \|f_m\|^2 \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому $B(f_m, \zeta) - \mu_n(f_m, \zeta) = (l\zeta, f_m) - \mu_n(\zeta, f_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, для предела u последовательности (f_m) получаем $(l\zeta - \mu_n\zeta, u) = 0$ или

$$((l - \mu_n)\zeta, u) = 0. \tag{5}$$

Отсюда еще не следует, что u — обобщенное решение задачи $(l - \mu_n)u = 0$, $u(a) = 0$, $u(b) = 0$, так как в (5) ζ не является произвольной функцией из D: функция ζ ортогональна к φ_k, $k = 1, \ldots, n$. Убедимся, однако, что (5) выполняется для любой функции $\zeta \in D$. Пусть $\zeta \in D$, положим

$$\zeta_n = \zeta - \sum\nolimits_{k=1}^{n} (\zeta, \varphi_k)\varphi_k.$$

Функция ζ_n принадлежит множеству D и ортогональна к φ_k, $k = 1, \ldots, n$:

$$(\zeta_n, \varphi_k) = (\zeta, \varphi_k) - \sum\nolimits_{l=1}^{n} (\zeta, \varphi_l)(\varphi_l, \varphi_k) = (\zeta, \varphi_k) - (\zeta, \varphi_k) = 0,$$

так как $(\varphi_l, \varphi_k) = \delta_{lk}$. Для функции ζ_n справедливо соотношение (5):

$$((l - \mu_n)\zeta_n, u) = 0. \tag{6}$$

Заметим теперь, что

$$l\zeta_n = (l\zeta)_n = l\zeta - \sum\nolimits_{k=1}^{n} (l\zeta, \varphi_k)\varphi_k.$$

Проверка проста: $(l\zeta, \varphi_k)\varphi_k = (\zeta, l\varphi_k)\varphi_k = (\zeta, \lambda_k\varphi_k)\varphi_k = (\zeta, \varphi_k)\lambda_k\varphi_k = (\zeta, \varphi_k)l\varphi_k$, откуда

$$(l\zeta)_n = l\zeta - \sum\nolimits_{k=1}^{n} (l\zeta, \varphi_k)\varphi_k = l\left(\zeta - \sum\nolimits_{k=1}^{n} (\zeta, \varphi_k)\varphi_k\right) = l\zeta_n.$$

Равенство $l\zeta_n=(l\zeta)_n$ позволяет переписать левую сторону соотношения (6) следующим образом:

$$((l-\mu_n)\zeta_n,\ u)=(((l-\mu_n)\zeta)_n,\ u)=$$
$$=((l-\mu_n)\zeta,\ u)-\sum_{k=1}^{n}((l-\mu_n)\zeta,\ \varphi_k)(\varphi_k,\ u).$$

Все члены минимизирующей последовательности удовлетворяют условиям ортогональности $(\varphi_k,\ f_m)=0$, $k=1,\ \dots,\ n$; $m=1,\ 2,\ \dots$. Устремляя m к пределу, получаем $(\varphi_k,\ u)=0$. Это значит, что соотношение (6) равносильно соотношению (5), в котором ζ — произвольная функция из D.

Тем самым доказано, что u — обобщенное, а значит, и классическое решение задачи $lu=\mu_n u$, $u(a)=0$, $u(b)=0$. В частности, $u\in D$. Подведем итог: $u\in D$, $\|u\|=1$ (это устанавливается предельным переходом в равенстве $\|f_m\|=1$), $(u,\ \varphi_k)=0$, $k=1,\ \dots,\ n$, $lu=\mu_n u$. Так как u — нормированная собственная функция оператора Штурма — Лиувилля, то $K(u)=\mu_n$. Разрешимость экстремальной задачи II установлена, теорема II доказана.

Множество собственных значений. Докажем сформулированную в п. 53 теорему о структуре множества собственных значений. Теорема утверждает, что последовательность собственных значений (λ_n), отвечающих последовательности основных задач, при $n\to\infty$ стремится к бесконечности. Утверждение теоремы будет установлено, если показать, что *никакое бесконечное множество собственных значений оператора Штурма — Лиувилля не может быть ограниченным*.

Обращаясь к доказательству этого факта, предположим обратное: пусть существует ограниченное бесконечное множество M собственных значений. Ограниченность означает, что найдется такое число c, что $\mu\leqslant c$ при всех $\mu\in M$. Для каждого собственного значения μ из множества M справедливо равенство

$$I(\psi_\mu)=\mu,$$

где ψ_μ — соответствующая нормированная собственная функция. Воспользуемся оценкой (2) из п. 56:

$$\|\psi_\mu\|^2_{H^1}\leqslant\left(\min_\Delta p\right)^{-1}\left(c+\min_\Delta p-\min_\Delta q\right).$$

Таким образом, множество собственных функций, отвечающих собственным значениям из множества M, ограничено в H^1 и тем самым компактно в $C(\Delta)$, а значит, содержит сходящуюся последовательность (ψ_m), элементы которой попарно ортогональны. Рассмотрим норму $\|\psi_n-\psi_m\|_H$, считая $n\neq m$. С одной стороны,

$$\|\psi_n-\psi_m\|^2_H=(\psi_n-\psi_m,\ \psi_n-\psi_m)=\|\psi_n\|^2+\|\psi_m\|^2=2.$$

С другой стороны,

$$\|\psi_n-\psi_m\|^2_H=\int_\Delta(\psi_n-\psi_m)^2\,dt\leqslant\Delta\|\psi_n-\psi_m\|^2_C<\varepsilon.$$

Число ε может считаться сколь угодно малым, если n и m достаточно велики, так как последовательность (ψ_m) сходится, а следовательно, является фундаментальной в $C(\Delta)$. Полученное противоречие $2 < \varepsilon$ и означает, что бесконечное множество собственных значений не может быть ограниченным.

§ 2. Приложения вариационного подхода

60. Равенство Парсеваля для собственных функций. Напомним некоторые определения, относящиеся к ортонормированным системам в евклидовом пространстве E. Эти определения должны быть известны читателю из теории рядов Фурье. Пространство E предполагается бесконечномерным, в конечномерном пространстве понятия, которые будут обсуждаться, тривиализуются.

Последовательность (ψ_n) *элементов евклидова пространства* называется *ортонормированной, если при всех* $n, m = 1, 2, \ldots$ *выполняются соотношения* $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$, *где* δ_{nm} — *символ Кронекера.* Примером ортонормированной системы в пространстве H может служить последовательность (φ_n) нормированных собственных функций оператора Штурма — Лиувилля. Пусть $\mathbf{x}$ — элемент пространства E. Его *коэффициентами Фурье* относительно последовательности (ψ_n) называются элементы числовой последовательности (α_n), где $\alpha_n = (\mathbf{x}, \psi_n)$. Положим

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x} - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}, \psi_k)\, \psi_k.$$

Прямые вычисления показывают, что справедливы соотношения: 1) $(\mathbf{x}_n, \psi_k) = 0$ при $k \leqslant n$, 2) $\|\mathbf{x}_n\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}, \psi_k)^2$. Из 2) следует, что *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)^2$ *всегда сходится*, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)^2 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 \quad (\textit{неравенство Бесселя}).$$

Ортонормированная последовательность называется замкнутой, если для любого $\mathbf{x} \in E$ *выполняется равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)^2 = \|\mathbf{x}\|^2,$$

которое принято называть *уравнением замкнутости*, или *равенством Парсеваля.* Замкнутость системы (ψ_n) равносильна тому, что для любого $\mathbf{x}$ имеет место предельное соотношение: $\mathbf{x}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предельное соотношение: $\mathbf{x}_n \to 0$ при $n \to \infty$, в свою очередь, равносильно тому, что: а) для любого $\mathbf{x}$ сходится последовательность $\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}, \psi_k)\, \psi_k$ (иначе говоря, сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_k)\, \psi_k$), б) предел последовательности $\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}, \psi_k)\, \psi_k$ (который принято обозначать $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_k)\, \psi_k$) равен вектору $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)\, \psi_n. \tag{1}$$

Таким образом, замкнутость последовательности (ψ_n) равносильна тому, что для любого вектора $\mathbf{x}$ выполняется равенство (1).

При выводе равенства Парсеваля часто используется следующее предложение. *Если равенство Парсеваля выполняется для векторов* $\mathbf{x}$ *из плотного в пространстве* E *множества, то оно выполняется для всех векторов из* E. Напомним, что *множество называется плотным в пространстве* E, *если любая окрестность* $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \varepsilon, \ \varepsilon > 0\}$, $\mathbf{a}$ и ε *произвольны, содержит элементы множества.*

Первым шагом в доказательстве являются проверка сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{x}, \psi_n)(\mathbf{y}, \psi_n)|$ при произвольных $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и вывод неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\mathbf{x}, \psi_n)(\mathbf{y}, \psi_n)| \leqslant \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|. \tag{2}$$

Воспользуемся неравенством Коши

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |(\mathbf{x}, \psi_k)(\mathbf{y}, \psi_k)|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{x}, \psi_k)^2 \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{y}, \psi_k)^2. \tag{3}$$

Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |(\mathbf{x}, \psi_k)(\mathbf{y}, \psi_k)|$ в силу (3) следует из сходимости рядов вида $\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_k)^2$. Переход к пределу в (3) и неравенство Бесселя дают (2). Второй и последний шаг доказательства состоит в следующем. Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из E, а вектор $\mathbf{h}$ выбран так, что для $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ выполняется равенство Парсеваля. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}+\mathbf{h}, \psi_n)^2 - \\ - 2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \|\mathbf{h}\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)(\mathbf{h}, \psi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{h}, \psi_n)^2 = \\ = -2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) - \|\mathbf{h}\|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)(\mathbf{h}, \psi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{h}, \psi_n)^2 \leqslant \\ \leqslant 4\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Эта выкладка показывает, что число $\|\mathbf{x}\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)^2$, с одной стороны, не зависит от $\mathbf{h}$, а с другой стороны, становится сколь угодно малым, если норма $\|\mathbf{h}\|$ достаточно мала. Так как векторы вида $\mathbf{x}+\mathbf{h}$, удовлетворяющие равенству Парсеваля, существуют при сколь угодно малых $\|\mathbf{h}\|$, то уравнение замкнутости $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \psi_n)^2$ выполнено при всех $\mathbf{x} \in E$.

Равенство Парсеваля для собственных функций. Покажем, что *ортонормированная последовательность* (φ_n) *собственных функций оператора Штурма — Лиувилля является замкнутой.*

Докажем, что равенство Парсеваля выполняется для функций, принадлежащих множеству D. Пусть $f \in C_0^1$. Положим $f_n = f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_n)\varphi_n$. Функция f_n ортогональна функциям φ_k, $k \leqslant n$. Если $f_n = 0$, то равенство Парсеваля для f выполнено.

Пусть $f_n \neq 0$, тогда $\|f_n\|_H \neq 0$ и полученное в § 1 вариационное описание собственных функций дает

$$K\left(\frac{f_n}{\|f_n\|_H}\right) \geqslant \lambda_{n+1}, \tag{4}$$

где λ_{n+1} — $(n+1)$-е в порядке возрастания собственное значение оператора Штурма — Лиувилля. Из последнего неравенства следует

$$\lambda_{n+1}\|f_n\|_H^2 \leqslant K(f_n).$$

Будем считать далее, что $f \in D$. Оценим правую сторону:

$$|K(f_n)| = |B(f_n, f_n)| = |(f_n, lf_n)| \leqslant \|f_n\| \|lf_n\| = \|f_n\| \|(lf)_n\| \leqslant \|f_n\| \|lf\|.$$

Здесь использованы равенство $lf_n = (lf)_n$, доказанное в п. 59, и неравенство $\|g_n\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(g, \varphi_k)^2 \leqslant \|g\|^2$, справедливое для произвольной функции g. Итак, $\lambda_{n+1}\|f_n\| \leqslant \|lf\|$. В § 1 было показано, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому $\|f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Равенство Парсеваля для функций, принадлежащих множеству D, доказано. Доказательство того, что множество D плотно в H, отнесено в Приложение 2.

61. Минимаксимальный принцип. Фиксируем в пространстве H n-мерное подпространство L. Так как функционал K полуограничен снизу на множестве функций h, принадлежащих C_0^1 и удовлетворяющих условию нормировки $\|h\|_H = 1$, то он полуограничен снизу также на множестве Φ_L функций h, принадлежащих C_0^1 и удовлетворяющих кроме условия нормировки $\|h\|_H = 1$ условию ортогональности: $(h, \psi) = 0$ для любой функции ψ, принадлежащей подпространству L. Обозначим через $\mu(L)$ точную нижнюю границу функционала K на множестве Φ_L.

Теорема Куранта (минимаксимальный принцип). *Справедливо соотношение*

$$\lambda_{n+1} = \sup_L \mu(L).$$

Иными словами, *множество чисел* $\mu(L)$, *соответствующих всевозможным* n*-мерным подпространствам* L, *имеет точную верхнюю границу, которая равна* λ_{n+1}.

Для доказательства достаточно проверить два факта:

а) *существует такое подпространство* L, *что* $\mu(L) = \lambda_{n+1}$;

б) *при каждом* L *существует такой вектор* h *из множества* Φ_L, *что* $K(h) \leqslant \lambda_{n+1}$.

Выбрав в качестве L подпространство, натянутое на собственные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ оператора Штурма — Лиувилля, перенумерованные обычным образом, в соответствии с вариационным описанием собственных функций получаем $\mu(L) = \lambda_{n+1}$. Таким образом, а) установлено.

Обращаясь к б), фиксируем подпространство L и будем искать вектор h, принадлежащий Φ_L, в виде

$$h = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varphi_k, \tag{5}$$

где φ_k — нормированные собственные функции. Выберем в подпространстве L базис $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Условие ортогональности вектора h к подпространству L равносильно n соотношениям $(h, \psi_1) = 0, \ldots$ $\ldots, (h, \psi_n) = 0$, которые можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений для $n+1$ коэффициента $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Такая система имеет ненулевое решение, которое остается решением после умножения на произвольный числовой множитель. Подбором этого множителя можно добиться того, что будет выполняться условие нормировки

$$\|h\|_H^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1.$$

Итак, действительно существует вектор h вида (5), принадлежащий множеству Φ_L. Вычислим на этом векторе функционал K:

$$K\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\varphi_k\right) = B\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\varphi_k,\ \sum_{m=1}^{n+1} a_m\varphi_m\right) =$$
$$= \sum_{k,\ m=1}^{n+1} a_k a_m\, B(\varphi_k,\ \varphi_m) = \sum_{k,\ m=1}^{n+1} a_k a_m\, (\varphi_k,\ l\varphi_m) =$$
$$= \sum_{k,\ m=1}^{n+1} \lambda_m a_k a_m\, (\varphi_k,\ \varphi_m) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k a_k^2. \qquad (6)$$

Отсюда

$$K\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\varphi_k\right) \leqslant \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 = \lambda_{n+1}.$$

Утверждение б), а вместе с ним и теорема Куранта доказаны.

Важное различие между минимаксимальным принципом и вариационным описанием собственных значений состоит в том, что принцип дает непосредственное описание собственного значения λ_{n+1}, не требующее предварительного отыскания предшествующих собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и собственных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Преимущества, вытекающие из этого отличия, будут проиллюстрированы следующим результатом.

Асимптотическое поведение собственных значений. Сопоставим два оператора Штурма — Лиувилля, заданных на одном и том же интервале Δ:

$$lu = -(pu')' + qu,\quad l_1u = -(p_1u')' + q_1u.$$

Обозначим отвечающие им функционалы K и K_1. Пусть $p \leqslant p_1$ и $q \leqslant q_1$. Точные нижние границы $\mu(L)$ и $\mu_1(L)$ функционалов K и K_1 на множестве Φ_L удовлетворяют неравенству $\mu(L) \leqslant \mu_1(L)$. Обращаясь к минимаксимальному принципу, можно утверждать, что собственные значения (λ_n) и $(\lambda_n^{(1)})$ операторов l и l_1 при всех n подчиняются соотношению

$$\lambda_n \leqslant \lambda_n^{(1)}. \qquad (7)$$

Положим $p_M = \max\limits_{\Delta} p$, $q_M = \max\limits_{\Delta} q$, $p_m = \min\limits_{\Delta} p$, $q_m = \min\limits_{\Delta} q$ и введем операторы

$$l_M u = -p_M u'' + q_M u,\quad l_m u = -p_m u'' + q_m u.$$

Решения u_M и u_m уравнений $l_M u_M = \lambda u_M$, $l_m u_m = \lambda u_m$, удовлетворяющие условиям $u_M(a) = 0$, $u_m(a) = 0$, равны

$$u_M(t) = A \sin \sqrt{\frac{\lambda - q_M}{p_M}}(t-a), \quad u_m(t) = A \sin \sqrt{\frac{\lambda - q_m}{p_m}}(t-a).$$

Условия $u_M(b) = 0$, $u_m(b) = 0$ определяют собственные значения $(\lambda_n^{(M)})$ и $(\lambda_n^{(m)})$:

$$\lambda_n^{(M)} = q_M + p_M \left(\frac{n\pi}{|\Delta|}\right)^2, \quad \lambda_n^{(m)} = q_m + p_m \left(\frac{n\pi}{|\Delta|}\right)^2.$$

Согласно (7) собственные значения (λ_n) оператора l подчиняются неравенствам

$$p_m \left(\frac{n\pi}{|\Delta|}\right)^2 + q_m \leqslant \lambda_n \leqslant p_M \left(\frac{n\pi}{|\Delta|}\right)^2 + q_M.$$

Таким образом, члены последовательности (λ_n) при больших номерах растут с такой же скоростью, как члены последовательности (n^2).

Результат, выраженный последним неравенством, может быть существенно улучшен. Может быть показано, что

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \left[\int_\Delta \frac{dt}{\sqrt{p(t)}}\right]^{-2} + \tilde{\lambda}_n, \tag{8}$$

причем последовательность $(\tilde{\lambda}_n)$ ограничена, иными словами, существует такое число c, что $|\tilde{\lambda}_n| \leqslant c$. Вывод последней формулы использует некоторое специальное отображение (обозначим его через U), сопоставляющее функции f, принадлежащей $H(\Delta)$, $H^1(\Delta)$ или $H_0^1(\Delta)$, функцию $g = Uf$, принадлежащую $H[0, d]$, $H^1[0, d]$ или $H_0^1[0, d]$, где $d = \int_\Delta \frac{dt}{\sqrt{p}}$. Это отображение задается формулой

$$g(\xi) = (p(t))^{1/4} f(t), \quad \xi = \int_a^t \frac{d\tau}{\sqrt{p(\tau)}}.$$

Основные свойства отображения U даются двумя следующими соотношениями:

$$(f, \tilde{f})_{H(\Delta)} = (Uf, U\tilde{f})_{H[0, d]},$$
$$\int_\Delta (pf'^2 + qf^2)\, dt = \int_0^d (g'^2 + \sigma g^2)\, d\xi, \quad g = Uf, \quad f \in C_0^1(\Delta),$$

причем функция σ может быть явно вычислена в терминах функций p и q. Предлагаем читателю самостоятельно проверить эти соотношения и с их помощью доказать формулу (8).

62. Отрицательные собственные значения. Неравенство (4) в частном случае $n = 0$ принимает вид

$$\lambda_1 \|f\|^2 \leqslant K(f).$$

Здесь f — произвольный элемент $C_0^1(\Delta)$. Если $f = c\varphi_1$, где c — произвольная постоянная, то в полученном неравенстве осущест-

вляется равенство. Отсюда могут быть сделаны следующие выводы:

1) *для того чтобы функционал K был положительным, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее собственное значение λ_1 оператора Штурма — Лиувилля l было неотрицательным:* $\lambda_1 \geqslant 0$;

2) *для того чтобы функционал K был положительно-определенным или, что равносильно, равномерно-положительным в $\overset{\circ}{H}{}^1(\Delta)$, необходимо и достаточно, чтобы наименьшее собственное значение λ_1 оператора Штурма — Лиувилля было положительным.*

Отметим, что равносильность положительной определенности и равномерной положительности функционала K на $\overset{\circ}{H}{}^1$ легко выводится из построений настоящего параграфа независимо от результатов гл. I. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим наряду с оператором l оператор $\tilde{l}$:

$$\tilde{l}u = -((p-\mu)u')' + (q-\mu)u,$$

где μ — положительное число, $\mu < \min\limits_{\Delta} p$. Оператору $\tilde{l}$ соответствует функционал

$$\tilde{K}(u) = \int_\Delta [(p-\mu)u'^2 + (q-\mu)u^2]\,dt = K(u) - \mu \|u\|^2_{H^1}.$$

В п. 63 будет доказана лемма, которая гласит, в частности, что наименьшее собственное значение λ_1 оператора l и наименьшее собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ оператора $\tilde{l}$ удовлетворяют неравенству

$$|\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1| \leqslant \mu\left[1 + \left(\min_\Delta p\right)^{-1}\left(\lambda_1 - \min_\Delta q\right)\right].$$

Пусть функционал K положительно определен, т. е. $\lambda_1 > 0$. При достаточно малых μ число $\tilde{\lambda}_1$ неотрицательно, следовательно, для таких μ $\tilde{K}(u) \geqslant 0$, $u \in \overset{\circ}{C}{}^1$ и, значит, $K(u) \geqslant \mu\|u\|^2_{H^1}$.

Напомним, что результаты п. 25 позволили охарактеризовать положительность и положительную определенность функционала K в терминах решений уравнения $lu = 0$, удовлетворяющих условию $u(a) = 0$. Сопоставляя утверждения 1), 2) и результаты п. 25, легко убедиться, что оператор Штурма — Лиувилля имеет отрицательное (неположительное) собственное значение тогда и только тогда, когда решение u имеет корень на интервале (a, b) (соответственно $(a, b]$). Сформулированное предложение является частным случаем следующей теоремы.

Теорема. *Число отрицательных (неположительных) собственных значений оператора Штурма — Лиувилля равно числу корней решения u на интервале (a, b) (соответственно $(a, b]$).*

Число отрицательных (неположительных) собственных значений играет для функционала K такую же роль, как и в случае квадратичных функций на $\mathbf{R}^k$. Предположим, чтобы избежать многократных оговорок, что нуль не является собственным значением рассматриваемого оператора l. Число отрицательных соб-

ственных значений равно размерности подпространства H_-, на ненулевых векторах которого функционал K принимает отрицательные значения, причем на ненулевых векторах, ортогональных к H_-, функционал K, напротив, принимает положительные значения. Подпространство H_- является линейной оболочкой собственных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, отвечающих отрицательным собственным значениям, т. е. состоит из функций вида $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$, числа a_k произвольны. Для таких функций согласно формуле (6)

$$K(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k^2 \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \lambda_n \|f\|^2,$$

так что действительно $K(f) < 0$ при $f \neq 0$. Если же функция f ортогональна к H_-, то согласно (4) $K(f) \geqslant \lambda_{n+1} \|f\|^2$, так что $K(f) > 0$ при $f \neq 0$.

Доказательство теоремы будет проведено при дополнительных предположениях: $p \in C^2(\Delta)$, $q \in C^1(\Delta)$. Справедливость утверждения от этих предположений в действительности не зависит. Обращаясь к доказательству, рассмотрим при каждом β из интервала $(a, b]$ оператор l на интервале $[a, \beta]$. Обозначим его собственные значения с обычной договоренностью об упорядочении через $\lambda_n(\beta)$, $n = 1, 2, \ldots$. Оказывается, что

а) *при β, достаточно близком к a, собственные значения $\lambda_n(\beta)$ положительны;*

б) *при всех n функции $\lambda_n(\beta)$ непрерывны;*

в) *функции $\beta \to \lambda_n(\beta)$ являются строго монотонно убывающими.*

Покажем, что из предложений а) — в) вытекает утверждение теоремы. Доказательство предложений а) — в) будет дано в следующем пункте. Обозначим через b_n корень функции $\lambda_n(\beta)$, расположенный на интервале $(a, b]$. При данном n корень может отсутствовать; если же он существует, то в силу строгой монотонности функции он единствен. Предположим, что функция $\lambda_n(\beta)$ при данном n имеет корень на интервале $(a, b]$. Тогда функция $\lambda_m(\beta)$ при $m < n$ обязана иметь корень на интервале (a, b). Действительно, в силу строгой монотонности функции $\lambda_n(\beta)$ выполняется неравенство $\lambda_n(b) \leqslant 0$, а значит, неравенство $\lambda_m(b) < 0$. Так как $\lambda_m(\beta) > 0$ при β, достаточно близких к a, то в силу непрерывности функция $\lambda_m(\beta)$ имеет корень на интервале (a, b).

Из этих рассмотрений следует, что число отрицательных (неположительных) собственных значений оператора l на интервале Δ совпадает с числом корней b_n на интервале (a, b) (соответственно $(a, b]$).

Рассмотрим ненулевое решение u уравнения $lu = 0$, $u(a) = 0$. Покажем, что множество корней этого решения на интервале $(a, b]$ совпадает с множеством корней b_n. Покажем, что b_n — корень решения u. Пусть $\varphi_{n\beta}$ — собственная функция оператора l на интервале $[a, \beta]$, продолженная как решение уравнения на интервал Δ. Она удовлетворяет уравнению $l\varphi_{n\beta} = \lambda_n(\beta)\varphi_{n\beta}$ и условиям $\varphi_{n\beta}(a) = 0$, $\varphi_{n\beta}(\beta) = 0$. Если $\beta = b_n$, то уравнение принимает вид

$l\varphi_{n\beta}=0$. Функция u лишь постоянным множителем отличается от собственной функции φ_{nb_n}, поэтому $u(b_n)=0$. Пусть теперь c — произвольный корень функции u. Ясно, что в этом случае 0 — собственное значение оператора l на интервале $[a, c]$. Но это значит, что при некотором n справедливо равенство $\lambda_n(c)=0$, т. е. $c=b_n$.

Подведем итог. С одной стороны, число отрицательных (неположительных) собственных значений оператора l на интервале Δ

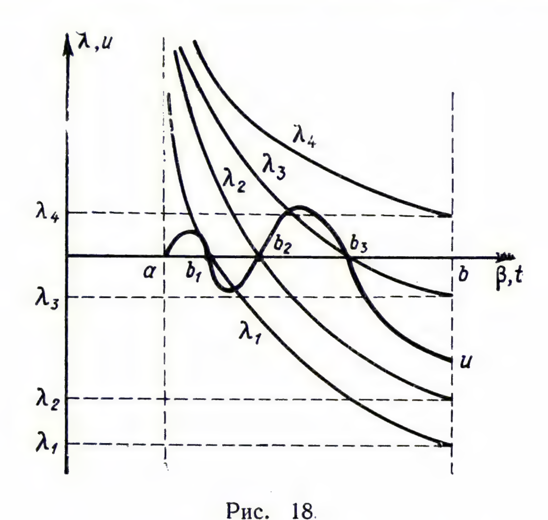


Рис. 18

совпадает с числом корней b_n на интервале (a, b) (соответственно $(a, b]$). С другой стороны, корни решения u совпадают с корнями b_n. Сопоставление этих утверждений и приводит к теореме. Рис. 18 иллюстрирует соотношение между графиками функций λ_n и графиком функции u.

63. **Доказательство предложений а) — в).** Чтобы доказать а), достаточно убедиться, что $\lambda_1(\beta)>0$ при β, достаточно близких к a. В п. 25 было установлено неравенство

$$\int_a^\beta f^2(t)\,dt \leqslant \frac{(\beta-a)^2}{2}\int_a^\beta f'^2(t)\,dt,$$

в котором $f\in C_0^1[a, \beta]$. Воспользуемся этим неравенством:

$$K(f) \geqslant \min_\Delta p\int_a^\beta f'^2\,dt + \min_\Delta q\int_a^\beta f^2\,dt \geqslant$$
$$\geqslant\left[\min_\Delta p\cdot\frac{2}{(\beta-a)^2}+\min_\Delta q\right]\int_a^\beta f^2\,dt.$$

Отсюда

$$\lambda_1(\beta)\geqslant\min_\Delta p\cdot\frac{2}{(\beta-a)^2}+\min_\Delta q.$$

При достаточно малых $\beta - a$ правая сторона положительна, поэтому $\lambda_1(\beta) > 0$.

Обратимся к предложению б), утверждающему, что функция $\lambda_n(\beta)$ непрерывна.

Лемма. *Пусть l и $\tilde{l}$ — два оператора Штурма — Лиувилля на интервале Δ:*

$$lu = -(pu')' + qu, \quad \tilde{l}u = -(\tilde{p}u')' + \tilde{q}u,$$

причем $\| p - \tilde{p} \|_C \leqslant \varepsilon$, $\| q - \tilde{q} \|_C \leqslant \varepsilon$. Тогда собственные значения λ_n и $\tilde{\lambda}_n$ этих операторов подчиняются неравенству

$$|\lambda_n - \tilde{\lambda}_n| \leqslant \varepsilon \left[1 + \left(\min_\Delta p \right)^{-1} \left(\lambda_n - \min_\Delta q \right) \right].$$

Доказательство основывается на минимаксимальном принципе. Обозначим через K и $\tilde{K}$ функционалы, соответствующие операторам l и $\tilde{l}$. Имеем

$$\tilde{K}(f) = \int_\Delta (\tilde{p}f'^2 + \tilde{q}f^2)\, dt \leqslant \int_\Delta [(p+\varepsilon) f'^2 + (q+\varepsilon) f^2]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\min\limits_\Delta p} \right) \int_\Delta (pf'^2 + qf^2)\, dt + \varepsilon \int_\Delta \left(1 - \frac{q}{\min\limits_\Delta p} \right) f^2\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\min\limits_\Delta p} \right) K(f) + \varepsilon \left(1 - \frac{\min\limits_\Delta q}{\min\limits_\Delta p} \right) \int_\Delta f^2\, dt.$$

Отсюда следует

$$\tilde{\lambda}_n \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{\min p} \right) \lambda_n + \varepsilon \left(1 - \frac{\min q}{\min p} \right)$$

или

$$\tilde{\lambda}_n - \lambda_n \leqslant \varepsilon [1 + (\min p)^{-1} (\lambda_n - \min q)].$$

С другой стороны,

$$\tilde{K}(f) \geqslant \int_\Delta [(p-\varepsilon) f'^2 + (q-\varepsilon) f^2]\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{\min p} \right) K(f) - \varepsilon \int_\Delta \left(1 - \frac{q}{\min p} \right) f^2\, dt.$$

Таким образом,

$$\tilde{\lambda}_n \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{\min p} \right) \lambda_n - \varepsilon \left(1 - \frac{\min q}{\min p} \right)$$

и

$$\tilde{\lambda}_n - \lambda_n \geqslant -\varepsilon [1 + (\min p)^{-1} (\lambda_n - \min q)].$$

Объединяя полученные оценки для $\tilde{\lambda}_n - \lambda_n$, получаем утверждение леммы.

В порядке пояснения к лемме отметим, что $K(f) \geqslant \min q \int_\Delta f^2\, dt$, и поэтому $\lambda_n \geqslant \lambda_1 \geqslant \min\limits_\Delta q$.

Переходя к новому аргументу в дифференциальном уравнении $lu=\lambda u$ по формуле

$$t \to \xi = a + (t-a)\frac{b-a}{\beta-a},$$

получим вместо краевой задачи для уравнения $lu=\lambda u$ на интервале $[a, \beta]$ краевую задачу $l_\beta u=\lambda u$ на интервале Δ. Коэффициенты p_β и q_β оператора l_β имеют вид

$$p_\beta(\xi)=\left(\frac{b-a}{\beta-a}\right)^2 p(\tau(\xi)),\ \ q_\beta(\xi)=q(\tau(\xi)),$$

где $\tau(\xi)=a+(\xi-a)\dfrac{\beta-a}{b-a}$. Ясно, что при достаточно близких β и β' выполняются неравенства $\|p_\beta-p_{\beta'}\|\leqslant\varepsilon$, $\|q_\beta-q_{\beta'}\|\leqslant\varepsilon$ с произвольно выбранным $\varepsilon>0$. В силу леммы отсюда непосредственно вытекает, что функция $\lambda_n(\beta)$ непрерывна.

Доказательство предложения в). При доказательстве предложения в) вновь будет использован минимаксимальный принцип. Начнем с некоторых общих построений. Пусть непрерывный функционал I, заданный на нормированном векторном пространстве E, ограничен на множество M и полуограничен на нем снизу. *Пусть $\tilde{M}$ — плотное подмножество множества M. Справедливо равенство* $\inf\limits_{\mathbf{x}\in M} I(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}\in \tilde{M}} I(\mathbf{x})$.

Положим $\mu=\inf\limits_{\mathbf{x}\in M} I(\mathbf{x})$. Для проверки равенства достаточно показать, что при любом $\varepsilon>0$ существует такой элемент $\tilde{\mathbf{x}}\in\tilde{M}$, что $I(\tilde{\mathbf{x}})<\mu+\varepsilon$. Согласно определению числа μ существует такой элемент $\mathbf{x}$, принадлежащий M, что $I(\mathbf{x})<\mu+\varepsilon/2$. С другой стороны, так как $\tilde{M}$ — плотное подмножество M, по заданному δ можно указать такой элемент $\tilde{\mathbf{x}}$, что $\|\tilde{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|<\delta$. Число δ, а с ним и элемент $\tilde{\mathbf{x}}$, можно выбрать так, что будет выполняться неравенство $|I(\mathbf{x})-I(\tilde{\mathbf{x}})|<\varepsilon/2$. Оценим $I(\tilde{\mathbf{x}})$: $I(\tilde{\mathbf{x}})<I(\mathbf{x})+\varepsilon/2<\mu+\varepsilon$. Совпадение точных нижних границ на множествах M и $\tilde{M}$ установлено.

Пусть $\tilde{E}$ — векторное подпространство пространства E, плотное в E. Пусть множество M определяется уравнением $G(\mathbf{x})=0$, где G — непрерывно дифференцируемый функционал, не имеющий на множестве M стационарных точек. Положим $\tilde{M}=M\cap\tilde{E}$. Утверждается, что $\tilde{M}$ — плотное подмножество множества M.

Обращаясь к доказательству, заметим прежде всего, что *линейный функционал $L: E\to\mathbf{R}$, равный нулю на множестве $\tilde{E}$, равен нулю тождественно.* Действительно, пусть $\mathbf{x}\in E$. Благодаря плотности $\tilde{E}$ существует такая последовательность $(\mathbf{x}_n)$, элементы которой принадлежат $\tilde{E}$, что $\mathbf{x}_n\to\mathbf{x}$ при $n\to\infty$. Из линей-

ности функционала L следует его непрерывность, поэтому $L(\mathbf{x}_n) \to L(\mathbf{x})$ при $n \to \infty$. Так как $L(\mathbf{x}_n) = 0$, то $L(\mathbf{x}) = 0$.

Натянем на вектор $\tilde{\mathbf{h}} \in \tilde{E}$, считая $dG(\mathbf{a};\ \tilde{\mathbf{h}}) \neq 0$, подпространство $N_{\mathbf{a}}$. В п. 38 было показано, что всякий вектор $\mathbf{y} \in E$ допускает однозначное разложение $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\xi} \in M_{\mathbf{a}}$, $\boldsymbol{\eta} \in N_{\mathbf{a}}$, компоненты которого $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ непрерывно зависят от $\mathbf{y}$. Было показано также, что при достаточно малых $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} \in U_1$, определено такое отображение $\varphi\colon U_1 \to \mathbf{R}$ класса C^1, что точка $\mathbf{a} + \boldsymbol{\xi} + \varphi(\boldsymbol{\xi})\tilde{\mathbf{h}}$ лежит на множестве M. Представим $\mathbf{x} \in \tilde{E}$ формулой $\mathbf{a} + \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$ и положим $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{a} + \boldsymbol{\xi} + \varphi(\boldsymbol{\xi})\tilde{\mathbf{h}}$, где $\boldsymbol{\xi}$ — тот же вектор, что и в разложении вектора $\mathbf{x} - \mathbf{a}$. Тогда $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{E} \cap M$. Так как вектор $\boldsymbol{\xi}$ непрерывно зависит от $\mathbf{x}$, а φ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\xi}$, то $\tilde{\mathbf{x}}$ непрерывно зависит от $\mathbf{x}$. Следовательно, $\tilde{\mathbf{x}}$ достаточно близок к $\mathbf{a}$, если $\mathbf{x}$ достаточно близок к $\mathbf{a}$.

Пример 1. Если фигурирующий в предыдущем утверждении функционал G линеен, то наложенные на него условия сводятся к тому, чтобы он был отличен от тождественного нуля. Это ясно из того, что линейный функционал дифференцируем, причем его производная G' постоянна и равна $G : G'(\mathbf{x}) = G$.

Пример 2. Пусть $B : E^2 \to \mathbf{R}$ — симметричный билинейный функционал, причем соответствующий квадратичный функционал $K(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x},\ \mathbf{x})$ положительно определен, т. е. $K(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$. Тогда функционал $G(\mathbf{x}) = K(\mathbf{x}) - 1$ удовлетворяет наложенным выше условиям. Действительно, дифференциал $dG(\mathbf{x};\ \mathbf{h}) = 2B(\mathbf{x},\ \mathbf{h})$ в произвольной точке $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in M$, отличен от нуля, так как $K(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x},\ \mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$, а множество M не содержит нуля, ибо определяется уравнением $K(\mathbf{x}) = 1$.

Как уже говорилось, плотным векторным подпространством в H является множество D. В действительности, и более бедное *множество S, состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных на интервале Δ функций, является плотным векторным подпространством в H.* Высказанное утверждение будет доказано в Приложении 2. *Там же будет показано, что подпространство S является плотным в пространстве $H^1(\Delta)$.*

После этих общих замечаний обратимся к доказательству предложения в). Согласно минимаксимальному принципу для оператора Штурма — Лиувилля $\lambda_{n+1} = \sup\limits_{L} \mu(L)$, где $\mu(L) = \inf\limits_{f \in \Phi_L} K(f)$, а множество Φ_L состоит из нормированных функций, принадлежащих H_0^1 и ортогональных в H к n-мерному подпространству L. Число $\mu(L)$ не изменится, если множество Φ_L заменить в определении $\mu(L)$ его плотным подмножеством $\tilde{\Phi}_L$. Оказывается, подобным подмножеством является $\Phi_L \cap S$. Докажем это, считая, что свойство плотности S в H_0^1 известно.

Выберем в подпространстве L базис $(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)$. Условие ортогональности функции h, $h \in H_0^1$, к подпространству L равносильно условиям $(h,\ \psi_1) = 0,\ \ldots,\ (h,\ \psi_n) = 0$. Так как отображение $h \to (h,\ \psi_1)$ является ненулевым линейным функционалом, то мно-

жество векторов плотного векторного подпространства S, удовлетворяющих условию $(h, \psi_1)=0$, является плотным векторным подпространством в векторном подпространстве, выделенном в $\overset{\circ}{H}{}^1$ условием $(h, \psi_1)=0$. Продолжая эти рассуждения, убеждаемся, что векторное подпространство $S \cap H_L$ в пространстве H_L, состоящем из всех векторов пространства $\overset{\circ}{H}{}^1$, ортогональных к L, плотно в самом H_L. Множество Φ_L выделяется в подпространстве H_L наложением условия $(h, h)=1$. Согласно примеру 2 в Φ_L плотно множество $\tilde{\Phi}_L = \Phi_L \cap (S \cap H_L) = \Phi_L \cap S$.

Сравним теперь при разных β функционалы K_β:

$$K_\beta(f) = \int_a^\beta (pf'^2 + qf^2)\,dt.$$

Пусть $\beta' < \beta$. Фиксируем подпространство L в $H[a, \beta]$. Выделим на множестве $\Phi_L \subset \overset{\circ}{H}{}^1[a, \beta]$ функции f, удовлетворяющие условию $f(t)=0$ при $\beta' \leqslant t \leqslant \beta$. Обозначим множество таких функций через Φ_L'. Ограничив функции, принадлежащие L, на интервал $[a, \beta']$, получим подпространство L' в пространстве $H[a, \beta']$. Размерность L' может быть равна размерности L, а может оказаться и меньше размерности L. Рассмотрим множество $\Phi_{L'}$ в $\overset{\circ}{H}{}^1[a, \beta']$. Ясно, что $\Phi_L' \subset \Phi_{L'}$, ибо функции из Φ_L' не только сами равны нулю в точке β', но и имеют в ней нулевые производные. Очевидно, однако, что $S[a, \beta'] \cap \Phi_{L'} \subset \Phi_L'$. Поэтому

$$\inf_{f\in\Phi_L} K_\beta(f) \leqslant \inf_{f\in\Phi_L'} K_\beta(f) \leqslant \inf_{f\in S[a,\beta']\cap\Phi_{L'}} K_{\beta'}(f) = \inf_{f\in\Phi_{L'}} K_{\beta'}(f).$$

Отсюда

$$\sup_L \inf_{f\in\Phi_L} K_\beta(f) \leqslant \sup_{L'} \inf_{f\in\Phi_{L'}} K_{\beta'}(f).$$

Правая сторона лишь возрастет, если под L' понимать произвольное n-мерное подпространство пространства $H[a, \beta']$. При таком понимании подпространства L' неравенство принимает вид

$$\lambda_{n+1}(\beta) \leqslant \lambda_{n+1}(\beta'),$$

что и требовалось.

§ 3. Обобщения и связь с приближенными вычислениями

64. **О возможности обобщений**. Все результаты и построения двух предыдущих параграфов без труда переносятся на функционалы в пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. С незначительными видоизменениями они переносятся и на другие граничные условия, например естественные граничные условия. Иначе обстоит дело с функционалами на $C^1(D)$, в частности с функционалами вида

$$K(u) = \int_D \left[\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(\mathbf{x})\, u_{x_i} u_{x_j} + b(\mathbf{x})\, u^2\right] d\mathbf{x},$$
$$I(u) = K(u) - 2(u, f)_{H(D)}.$$

Считая функции a_{ij}, b и f достаточно гладкими, а матрицу $\{a_{ij}(\mathbf{x})\}$, $\mathbf{x} \in D$, равномерно положительной: $\sum_{i,j=1}^k a_{ij}(\mathbf{x})\,\xi_i\xi_j \geqslant \mu \|\xi\|^2$, $\mu > 0$, μ не зависит

от **x**, можно показать, что все доказанное в § 1 для пространства $C^1(\Delta)$, в том числе вариационное описание собственных функций

$$-\sum_{i,\ j=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} + b(\mathbf{x})\, u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}), \quad u|_{\partial D} = 0, \quad u \neq 0,$$

переносится на пространство $C^1(D)$. Сохраняются также уравнение замкнутости для собственных функций и минимаксимальный принцип. Однако доказательство разрешимости экстремальных задач нельзя получить лишь средствами, которые применялись выше. Утрачивается, например, компактность в $C(D)$ ограниченного множества функций из $H^1(D)$. Можно было бы попытаться использовать вместо пространства $C(D)$ пространство $H(D)$, но тут возникает новое обстоятельство, о котором уже упоминалось: пространство $H(D)$ — неполное пространство. Чтобы по образцу пространства $H(D)$ построить полное пространство, необходимо воспользоваться понятием *интеграла Лебега*. Владея интегралом Лебега, можно модифицировать рассмотрения § 1 так, что они окажутся применимыми к функционалам K и I на пространстве $C^1(D)$. Выше отмечалось, впрочем, что при исследовании квадратичных функционалов вместо пространства $C^1(D)$ предпочитают иметь дело с пространством типа $H^1(D)$. Упомянутые рассмотрения погружаются при этом в общие схемы функционального анализа и обычно излагаются в связи с теорией гильбертовых, т. е. полных евклидовых пространств.

Переход от квадратичных функционалов к общим интегральным функционалам, даже на $C^1(\Delta)$, также требует некоторой модификации построений § 1. Впрочем общий дух подобных построений и для квадратичных функционалов на $C^1(D)$ и для общих функционалов на $C^1(\Delta)$ не должен показаться неожиданным читателю, освоившемуся с содержанием § 1. При переходе к общим функционалам на $C^1(D)$ трудности возрастают, удовлетворительное состояние в этой области было достигнуто лишь в последние годы.

У читателя не должно складываться впечатления, что в простейшей задаче о минимуме квадратичного функционала на $C^1(\Delta)$ все вопросы решены и проблем нет. В приложениях условия, наложенные выше на функции p и q, часто нарушаются. Осложнения, возникающие при этом, также получают удовлетворительное разрешение в рамках гильбертова пространства. Мы ограничимся простыми иллюстрациями. При принятых выше предположениях относительно p и q оператор Штурма—Лиувилля l называется *регулярным*. Если эти предположения нарушаются или интервал, на котором рассматривается оператор, неограничен, оператор называется *сингулярным*. Типичные нарушения обычных предположений — обращение коэффициента p в нуль в отдельных точках, обращение q в бесконечность в отдельных точках или неограниченность интервала Δ. В соответствующих экстремальных задачах точная нижняя граница может не реализоваться, положительная определенность не обязательно влечет за собой равномерную положительность, собственные значения могут отсутствовать. Возможны и другие отклонения от положения, обычного для регулярного оператора.

Примеры.

1) На пространстве $C_0^1(\Delta)$, $\Delta = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, рассмотрим функционал

$$K(f) = \int_\Delta \cos^2 t\, \{[(\cos t)\, f(t)]'\}^2\, dt,$$

предполагая $\| f \|_H = 1$. Очевидно, что $K(f) > 0$, причем равенство $K(f) = 0$ невозможно. Покажем, что точная нижняя граница функционала равна нулю. Сделаем замену независимой переменной и функции

$$\xi = \operatorname{tg} t, \quad g(\xi) = \cos t \cdot f(t).$$

Функция g определена на **R**. После такого преобразования получим

$$K(f) = \tilde{K}(g) = \int_{\mathbf{R}} g'^2(\xi)\, d\xi, \quad \| f \|^2 = \tilde{G}(g) = \int_{\mathbf{R}} g^2(\xi)\, d\xi.$$

Точное описание того класса функций g, в который переходят функции f, $f \in C_0^1(\Delta)$, нам не понадобится. Легко проверить, однако, что функции $g(\xi) = ce^{-\varepsilon/2\,\xi^2}$, где c и ε — фиксированные числа, $\varepsilon > 0$, входят в этот класс. Подберем c из условия $\tilde{G}(g) = 1 : c^2 = (\varepsilon/\pi)^{1/2}$. Далее $\tilde{K}(g) = \varepsilon/2$ и, таким образом, $\tilde{K}(g) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, точная нижняя граница K действительно равна нулю. Функционал K может быть приведен к стандартному виду

$$K(f) = \int_\Delta [\cos^4 t \cdot f'^2(t) + \cos^2 t \cdot (1 - 3\sin^2 t) f^2(t)]\, dt.$$

Отсюда ясно, что в данном случае нарушается условие $p > 0$: коэффициент p обращается в нуль на концах интервала Δ. Исследуя пример, мы убедились, что от этой неприятности можно избавиться, приобретя, правда, другую: интервал Δ станет бесконечным.

2) Нижеследующий пример принадлежит Вейерштрассу. На пространстве $C_0^1[-1, 1]$ рассматривается функционал

$$I(u) = \int_{-1}^1 (t^2u'^2 - 4tu)\, dt = \int_{-1}^1 t^2(u' + 1)^2\, dt - \frac{2}{3}.$$

Ясно, что $I(u) > -\frac{2}{3}$, ибо $I(u) = -\frac{2}{3}$ означает $u' = -1$, так что $u(t) = -t + c$. Выбрать c так, чтобы выполнялись граничные условия, невозможно. Убедимся, что $-\frac{2}{3}$ — точная нижняя граница функционала I на $C_0^1[-1, 1]$. Пусть

$$u_\varepsilon(t) = -t + \frac{\operatorname{arctg} t/\varepsilon}{\operatorname{arctg} 1/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$I(u_\varepsilon) + \frac{2}{3} = \int_{-1}^1 t^2(u_\varepsilon'(t) + 1)^2\, dt <$$

$$< \int_{-1}^1 (t^2 + \varepsilon^2)(u_\varepsilon' + 1)^2\, dt = \frac{\varepsilon^2}{(\operatorname{arctg} 1/\varepsilon)^2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 + \varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon}{\operatorname{arctg} 1/\varepsilon}.$$

Следовательно, $I(u_\varepsilon) + \frac{2}{3} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

В п. 46 упоминался *принцип Дирихле*, который гласит, что точка минимума функционала

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_D (\nabla u)^2\, dx$$

на множестве $C_\varphi^1(D)$ функций, подчиненных условию $u|_{\partial D} = \varphi$, φ — заданная функция, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

История вариационного исчисления хранит любопытный эпизод, связанный с принципом Дирихле. То, что в наше время вполне ясно студенту, немногим более ста лет тому назад могло затруднить выдающихся математиков. В связи с исследованиями по теории функций комплексной переменной, которые в дальнейшем стали основой развития целого ряда математических дисциплин, Риман нуждался в доказательстве разрешимости задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Он считал, что получил такое доказательство, сославшись на принцип Дирихле: раз функционал I на $C_\varphi^1(D)$ принимает неотрицательные значения, то его значения имеют точную нижнюю границу и, следовательно, существует функция, реализующая эту границу; она и будет решением задачи Дирихле. Описанный выше пример 2) был предложен Вейерштрассом в порядке критики рассуждений Римана. Вейерштрасс заметил, что в нужном классе может не существовать функции, реализующей точную нижнюю границу. Критика Вейерштрасса, конечно, не означала, что точная нижняя граница не достигается в задаче, рассмотренной Риманом. Несколько де

сятилетий спустя, около 1900 г., Гильберт доказал, что с принципом Дирихле все обстоит благополучно. Впрочем, сама теорема о разрешимости задачи Дирихле была доказана раньше другими методами.

65. Метод Ритца. Как следует из рассмотрений § 1, при подходящих условиях минимизирующая последовательность все же сходится и имеет своим пределом решение экстремальной задачи. *Метод Ритца* представляет собою эффективный с точки зрения вычислительной практики метод построения минимизирующей последовательности и, как следствие, эффективный метод решения экстремальных задач. И теоретически и практически он содержателен только для функционалов на бесконечномерных пространствах, поэтому всюду, где будет обсуждаться метод Ритца, будет без оговорок предполагаться, что основное пространство бесконечномерно.

Пусть на нормированном пространстве E задан полуограниченный снизу функционал I. Зададимся также последовательностью E_n конечномерных подпространств в пространстве E. Будем предполагать, что размерность E_n равна n и что $E_n \subset E_{n+1}$. Ограничив функционал I на подпространство E_n, получим функцию $I_n : E_n \to \mathbf{R}$. Предположим, что функция I_n имеет точку абсолютного минимума $\mathbf{x}_n$. *Последовательность* $(\mathbf{x}_n)$ *называется последовательностью Ритца, порожденной последовательностью* (E_n). Вообще говоря, последовательность $(\mathbf{x}_n)$ определяется последовательностью (E_n) неоднозначно. Ясно также, что она может и не существовать. В силу самой конструкции выполняются неравенства

$$I(\mathbf{x}_m) \leqslant I(\mathbf{x}_n) \leqslant I(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $n \leqslant m$, $\mathbf{x} \in E_n$. Первое неравенство следует из того, что $E_n \subset E_m$. В приложениях вместо последовательности подпространств (E_n) обычно задается последовательность векторов $(\mathbf{e}_n)$, причем считается, что для любого n векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно-независимы. Подпространство E_n в этом случае определяется как линейная оболочка векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, т. е. как множество линейных комбинаций вида $\sum_{k=1}^n a_k\mathbf{e}_k$ с произвольными коэффициентами a_k. В этом случае вместо функции I_n можно рассматривать функцию $\tilde{I}_n : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,

$$\tilde{I}_n(\mathbf{a}) = \tilde{I}_n(a_1, \ldots, a_n) = I\left(\sum_{k=1}^n a_k\mathbf{e}_k\right),$$

и вопрос о точке минимума I_n превращается в вопрос о точке минимума функции $\tilde{I}_n$. Обозначим эту точку через $a^{(n)} = \left(a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}\right)$, тогда

$$\mathbf{x}_n = \sum_{k=1}^n a_k^{(n)}\mathbf{e}_k.$$

В этом случае говорят, что последовательность Ритца $(\mathbf{x}_n)$ *порождается последовательностью* $(\mathbf{e}_n)$. Последовательность подпространств E_n всегда можно считать заданной последовательностью векторов $(\mathbf{e}_n)$. Для этого в качестве $\mathbf{e}_1$ следует взять любой ненулевой вектор из пространства E_1, в качестве $\mathbf{e}_2$ — линейно-независимый с ним вектор из пространства E_2 и т. д.

Спрашивается, при каких условиях последовательность Ритца является минимизирующей.

Будем говорить, что последовательность подпространств (E_n) *(или соответствующая ей последовательность векторов* $(\mathbf{e}_n)$*) является полной, если множество векторов, принадлежащих подпространствам* E_n, $n = 1, 2, \ldots$, *плотно в* E.

Пусть функционал I *непрерывен, полуограничен снизу, а последовательность* (E_n) *является полной. Если последовательность Ритца* (x_n) *существует, она является минимизирующей.*

Итак, докажем, что $I(\mathbf{x}_n) \to \mu = \inf I$ при $n \to \infty$. Зададимся числом $\varepsilon > 0$. Следует показать, что существует такое число N, что $I(\mathbf{x}_n) < \mu + \varepsilon$ при $N \leqslant n$. В соответствии с определением числа μ можно найти такой вектор $\mathbf{x}$, что $I(\mathbf{x}) < \mu + \varepsilon/2$. Фиксируем $\mathbf{x}$. Благодаря непрерывности I найдется такое число δ, что $|I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{y})| < \varepsilon/2$ при $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$. В силу полноты последо-

вательности (E_n) найдутся такое число N и вектор $\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in E_N$, что $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta$. Подведем итог: при $N \leqslant n$

$$I(\mathbf{x}_n) \leqslant I(\mathbf{x}_N) < I(\mathbf{y}) < I(\mathbf{x}) + \varepsilon/2 < \mu + \varepsilon.$$

По поводу первых двух неравенств см. (1), третье является следствием выбора $\mathbf{y}$, четвертое — $\mathbf{x}$.

При переходе к условному экстремуму в конструкцию последовательности Ритца должны быть внесены изменения. Пусть, как обычно в задаче об условном экстремуме, функционал I: $E \to \mathbf{R}$ ограничен на множество M, описываемое уравнением $G(\mathbf{x}) = 0$, G: $E \to \mathbf{R}$. Начальным пунктом конструкции по-прежнему является последовательность подпространств (E_n). Вместе с функцией I_n: $E_n \to \mathbf{R}$ на этот раз возникает функция G_n: $E_n \to \mathbf{R}$. Предположим, что при каждом n функция I_n имеет точку абсолютного условного минимума $\mathbf{x}_n$, $\mathbf{x}_n \in E_n$, при условии $G_n(\mathbf{x}) = 0$. *Последовательность* $(\mathbf{x}_n)$ *по-прежнему называется последовательностью Ритца, порожденной последовательностью* (E_n).

Пусть функционал I непрерывен, полуограничен снизу, функционал G непрерывно дифференцируем и не имеет стационарных точек на множестве M, а последовательность (E_n) является полной. Если последовательность Ритца существует, она является минимизирующей.

Доказательство проводится так же, как и в случае безусловного экстремума, следует лишь учесть, что множество точек, принадлежащих множествам $M \cap E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, плотно в M. Доказательство последнего утверждения см. в п. 63.

Укажем условия, при которых существует последовательность Ритца. *Пусть ω обозначает функцию $[0, \infty) \to \mathbf{R}$, полуограниченную снизу и удовлетворяющую условию $\omega(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Если функционал I: $E \to \mathbf{R}$ непрерывен и удовлетворяет при некоторой функции ω неравенству $I(\mathbf{x}) \geqslant \omega(\|\mathbf{x}\|)$, то последовательность Ритца существует.*

Отметим, что из неравенства $I(\mathbf{x}) \geqslant \omega(\|\mathbf{x}\|)$ вытекает и полуограниченность функционала I. Будем считать, что последовательность подпространств (E_n) задается последовательностью векторов $(\mathbf{e}_n)$. Рассмотрим функцию $\tilde{I}_n$:

$$\tilde{I}_n(\mathbf{a}) = I\left(\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k\right).$$

Следует доказать, что она имеет точку абсолютного минимума на E_n. Функция I_n непрерывна, поэтому, будучи ограничена на произвольный шар $\|\mathbf{a}\| \leqslant R$, она имеет на нем точку абсолютного минимума. Если $\tilde{I}_n(\mathbf{a}) \to \infty$ при $\|\mathbf{a}\| \to \infty$, то при достаточно больших R эта точка будет, очевидно, точкой абсолютного минимума функции $\tilde{I}_n$ на $\mathbf{R}^n$. Функция $\mathbf{a} \to \left\|\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k\right\|$ непрерывна и поэтому имеет на сфере $\|\mathbf{a}\| = 1$, т. е. на замкнутом ограниченном множестве, точку абсолютного минимума $\mathbf{a}'$. Так как $\mathbf{a}' \neq 0$, то в силу линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ отличен от нуля вектор $\sum_{k=1}^n a'_k \mathbf{e}_k$. Следовательно, $\left\|\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k\right\| \geqslant \left\|\sum_{k=1}^n a'_k \mathbf{e}_k\right\| = \alpha > 0$. Если $\mathbf{a}$ — произвольный ненулевой вектор из $\mathbf{R}^n$, то $\left\|\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\|a\|} \mathbf{e}_k\right\| \geqslant \alpha$. Отсюда $\left\|\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k\right\| \geqslant \alpha \|\mathbf{a}\|$. Последнее неравенство показывает, что $\left\|\sum_{k=1}^n a_k \mathbf{e}_k\right\| \to \infty$ при $\|\mathbf{a}\| \to \infty$. Соотношение $\tilde{I}_n(\mathbf{a}) \to \infty$ доказано. Это значит, что какой бы ни была последовательность (E_n), последовательность Ритца для функционала I существует. Если последовательность (E_n) полная, последовательность Ритца является минимизирующей.

Подобные же утверждения могут быть сделаны для функционала

$$K(f) = \int_\Delta (pf'^2 + qf^2)\, dt,$$

рассматриваемого на множестве Φ_L, $\Phi_L \subset H_0^1$, состоящем из нормированных функций, ортогональных фиксированному конечномерному подпространству L.

Условие ортогональности к L выделяет в H_0^1 векторное подпространство, на которое и следует с самого начала ограничить функционалы K и

$$G(f) = \int_\Delta f^2 dt - 1.$$

Справедливо неравенство

$$K(f) + \lambda G(f) \geqslant \min_\Delta p \, \| f \|^2_{H^1} - \lambda, \; f \in H_0^1,$$

в котором $\lambda = \min\limits_\Delta p - \min\limits_\Delta q$. Таким образом, какой бы ни была последовательность (E_n), последовательность Ритца для функционала K на множестве Φ_L существует. Если последовательность (E_n) полная, последовательность Ритца является минимизирующей.

Последние рассуждения показывают, что *в задаче об условном экстремуме условие $I(\mathbf{x}) \geqslant \omega(\|\mathbf{x}\|)$ можно заменить более слабым. Если функционалы I и G непрерывны и при некотором числе λ и некоторой функции ω выполняется неравенство*

$$I(\mathbf{x}) + \lambda G(\mathbf{x}) \geqslant \omega(\|\mathbf{x}\|), \; \omega(t) \to \infty \text{ при } t \to \infty,$$

то последовательность Ритца в задаче на условный минимум существует.

Доказательство этого утверждения полностью сведется к только что изложенным рассуждениям, если учесть, что множество в $\mathbf{R}^n$, определяемое уравнением $\tilde{G}_n(\mathbf{x}) = 0$, замкнуто и функция $\tilde{I}_n$ удовлетворяет на нем прежней оценке.

Обратимся к функционалу I в пространстве H_0^1:

$$I(u) = \int_\Delta (pu'^2 + qu^2 - 2fu)\, dt,$$

отвечающему неоднородной задаче Штурма — Лиувилля. Известно, что функционал I непрерывен. Предположим, как обычно, что функционал

$$K(u) = \int_\Delta (pu'^2 + qu^2)\, dt$$

положительно определен, а следовательно, и равномерно положителен:

$$K(u) \geqslant \mu \| h \|^2_{H^1}.$$

Тогда

$$I(u) \geqslant \mu/2 \, \| u \|^2_{H^1} - 2/\mu \, \| f \|^2_H.$$

Приведем, не останавливаясь на доказательстве, примеры последовательностей, полных в пространстве H_0^1. Оказывается, в пространстве $H_0^1[0, 1]$ полны последовательность (f_n), состоящая из функций $f_n(t) = (1-t)t^n$, и последовательность (s_n), состоящая из функций $s_n(t) = \sin n\pi t$. Эти последовательности часто используются в приложениях.

66. Метод Галеркина. Метод Эйлера. Пусть I — интегральный функционал в пространстве C_0^1:

$$I(f) = \int_\Delta L(t, f(t), f'(t))\, dt.$$

Пусть (g_n) — последовательность функций из множества D. Рассмотрим порождаемую ею последовательность Ритца (f_n).

Функция f_n ищется как линейная комбинация $c_1 g_1 + \ldots + c_n g_n$, сообщающая минимум интегралу

$$\tilde{I}_n(a) = \int_\Delta L\left(t, \sum_{k=1}^n a_k g_k(t), \sum_{k=1}^n a_k g'_k(t)\right) dt.$$

Функционал I дифференцируем, поэтому в точке минимума $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial \tilde{I}_n(\mathbf{a})}{\partial a_k} = dI\left(\sum_{l=1}^n a_l g_l; \; g_k\right) = 0.$$

Воспользуемся формулой для дифференциала dI, тогда уравнения для точки минимума функции $\tilde{I}_n$ примут вид

$$(L\left[\sum_{l=1}^{n} a_l g_l\right], g_k)_H = 0, \ k = 1, \dots, n.$$

Ясно, что полученные уравнения для точки **a** полностью определяются структурой дифференциального уравнения Эйлера. Это замечание лежит в основе не зависящего от вариационного исчисления метода приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений — *метода Галеркина.*

Пусть $\Phi(t, x, v, d)$ — функция $\Delta \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\Phi(t, f(t), f'(t), f''(t)) = 0.$$

Будем искать решение f, принадлежащее множеству D, т. е. решение, принадлежащее C^2 и удовлетворяющее граничным условиям $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Левая сторона этого уравнения представляет собою функцию $\Delta \to \mathbf{R}$. Обозначим эту функцию через $\Phi[f]$. Исходным элементом метода Галеркина, так же как и метода Ритца, является последовательность функций (g_n), принадлежащих множеству D (или последовательность подпространств (E_n)). Элементы f_n *последовательности Галеркина* ищутся в виде

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k.$$

Коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ определяются из уравнений

$$\left(\Phi\left[\sum_{l=1}^{n} a_l g_l\right], g_k\right)_H = 0, \ k = 1, \dots, n.$$

Видно, что для уравнения Эйлера метод Галеркина сводится к методу Ритца. Мы изложили сущность метода Галеркина на примере краевой задачи для одного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Ясно, однако, что *схема не зависит ни от порядка уравнения, ни от числа уравнений, ни от количества независимых переменных.*

В вводной части к данной главе упоминался *метод ломаных Эйлера.* Его можно рассматривать как еще один метод построения минимизирующей последовательности. В сущности, он отличается от метода Ритца лишь тем, что пространство E_n, вообще говоря, не вложено в E_{n+1}. Приведем несколько формул, поясняющих метод Эйлера. Чтобы построить пространство E_n, следует задать n точек $t_k \in \Delta$ так, что $a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. В частности, можно расположить точки на равном расстоянии: $t_k = a + |\Delta| \dfrac{k-1}{n-1}$. Пространство E_n состоит из функций вида

$$f(t) = a_k + (a_{k+1} - a_k)\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \ t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}.$$

Числа $a_k = f(t_k)$, $k = 1, \dots, n$, здесь произвольны, их задание равносильно заданию функции f. Функция f — кусочно-линейная непрерывная функция; она принадлежит не пространству $C^1(\Delta)$, а более широкому множеству $\hat{C}^1(\Delta)$ (см. п. 24), состоящему из кусочно-непрерывно дифференцируемых функций; норму на $\hat{C}^1(\Delta)$ можно ввести той же формулой, что и на $C^1(\Delta)$. Вычислим интеграл $I(f)$:

$$I(f) = \int_\Delta L(t, f(t), f'(t))\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k(a_k, a_{k+1}),$$

где

$$\Phi_k(x, y) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} L\left(t, x + (y - x)\frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \frac{y - x}{t_{k+1} - t_k}\right) dt.$$

Функция $I_n(a_1, \dots, a_n)$ не является функцией общего вида

$$I_n(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_k(a_k, a_{k+1}).$$

Специальная структура функции I_n отражает локальный характер интегрального функционала.

67. Примеры.

1) Краевая задача

$$u''+u+t=0, \quad u \in D[0,\ 1],$$

соответствует экстремальной задаче для функционала

$$I(u)=\int_0^1 (u'^2-u^2-2tu)\,dt, \quad u \in C_0^1[0,\ 1].$$

Уравнение Якоби для функционала K

$$K(u)=\int_0^1 (u'^2-u^2)\,dt$$

имеет вид $u''+u=0$. Решение u, удовлетворяющее условию $u(0)=0$, равно $c \sin t$. Точки, сопряженные к 0, на интервале [0, 1] отсутствуют, поэтому функционал K положительно определен. Следовательно, решение краевой задачи — точка абсолютного минимума функционала I. Это решение легко найти явно:

$$u(t)=(\sin 1)^{-1}\sin t-t.$$

Если строить последовательность Ритца, отправляясь от системы (t^n), то каждый элемент последовательности Ритца, удовлетворяющий граничным условиям, будет содержать множителем функцию $t(1-t)$. Поэтому естественно положить

$$e_n(t)=(1-t)\,t^n, \quad n \geqslant 1.$$

После этого вопрос о граничных условиях снимается. Первый элемент последовательности Ритца ищем в виде $f_1=a_1e_1$. Подстановка в функционал I дает

$$\tilde{I}_1(a_1)=I(a_1e_1)=3/10a_1^2-1/6a_1.$$

Функция $\tilde{I}_1$ имеет точку абсолютного минимума $a_1^{(1)}=5/18$. Второй элемент последовательности Ритца ищем в виде $f_2=a_1e_1+a_2e_2$. Подстановка в функционал I дает

$$\tilde{I}_2(a_1,\ a_2)=I(a_1e_1+a_2e_2)=3/10a_1^2+13/105a_2^2+3/10a_1a_2-1/6a_1-1/10a_2.$$

Функция $\tilde{I}_2$ имеет точку абсолютного минимума $a_1^{(2)}=71/369$, $a_2^{(2)}=7/41$. Итак, $f_1=5/18e_1$, $f_2=71/369e_1+7/41e_2$. Изложенный пример и нижеприведенная таблица заимствованы из [4, с. 289].

t	u	f_1	f_2
1/4	0,044	0,052	0,044
1/2	0,070	0,069	0,069
3/4	0,060	0,052	0,060

Таблица демонстрирует высокую эффективность обсуждаемого приема.

2) Вариационные соображения используются в квантовой механике при численном теоретическом отыскании *энергетических уровней атомов и молекул*. Одновременно с энергетическими уровнями, которые являются собственными значениями *оператора энергии*, приближенно отыскиваются также *собственные функции, т. е. квантовые состояния атомов и молекул*. Анализ явно решаемых частных случаев и физические соображения лежат в основе ряда специальных приемов, которые во многих задачах позволяют получать результаты, прекрасно совпадающие с экспериментом. В общем плане эти приемы почти не отличаются от метода Ритца, разница состоит лишь в том, что элементы последовательно-

сти (E_n) не обязательно являются векторными подпространствами, а представляют собой некоторые *нелинейные n-мерные поверхности в пространстве E*. Нелинейность часто сводится к введению числового параметра в функции (e_n), линейные оболочки которых порождают последовательность (E_n).

Если учитывать лишь наиболее существенные взаимодействия, то *оператор энергии* $\mathbf{H}_N$ *системы N электронов, образующих электронную оболочку нейтрального атома, оказывается линейным оператором, действующим на такие принадлежащие классу* C^2 *элементы* ψ *пространства* $H(\mathbf{R}^{3N})$, *что и* $\mathbf{H}_N\psi \in H$. Чтобы записать этот оператор, сгруппируем, как это уже делалось, координаты вектора $\mathbf{x}$ из $\mathbf{R}^{3N}$ по тройкам $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$, где $\mathbf{r}_k \in \mathbf{R}^3$. Вектор $\mathbf{r}_k$ имеет смысл координаты k-го электрона. В этих обозначениях оператор $\mathbf{H}_N$ приобретает вид

$$(\mathbf{H}_N\psi)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \Delta_k\psi(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{N} u(\mathbf{r}_k)\psi(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}),$$

где Δ_k — оператор Лапласа в $\mathbf{R}^3$, действующий на функцию от $\mathbf{r}_k$, а функция $U: \mathbf{R}^{3N} \to \mathbf{R}$ дается формулой

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{k<l \\ k, l = 1, \ldots, N}} \tilde{u}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l).$$

Функции $u, \tilde{u}: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ — потенциалы внешнего поля и парного взаимодействия

$$u(\mathbf{r}) = \frac{N}{\|\mathbf{r}\|}, \quad \tilde{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}.$$

Введем квадратичный функционал

$$l(\psi) = (\mathbf{H}_N\psi, \psi)_H.$$

Точная нижняя граница этого функционала на множестве функций класса C^2, для которых фиксирован интеграл $(\psi, \psi)_H = 1$, равна наименьшему собственному значению оператора $\mathbf{H}_N$. Это собственное значение имеет смысл *наименьшей энергии соответствующей физической системы,* соответствующая собственная функция, на которой и достигается точная нижняя граница, описывает само состояние системы в квантовой механике. При разных N минимизирующая последовательность строится различно. При $N=1$ (*атом водорода*) собственные значения и собственные функции оператора $\mathbf{H}_1$ могут быть построены аналитически. Пусть $N=2$, что соответствует *атому гелия*. Элементы последовательности (e_n), с помощью которой строится минимизирующая последовательность, нумеруются тремя натуральными числами

$$e_{klm}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}\alpha s} s^{k-1} t^{2l-2} u^{m-1},$$
$$s = \|r_1\| + \|r_2\|, \quad t = \|r_1\| - \|r_2\|, \quad u = \|r_1 - r_2\|.$$

Кроме коэффициентов a_{klm} линейной комбинации

$$\sum_{k \leqslant K, l \leqslant L, m \leqslant M} a_{klm} e_{klm}(\alpha)$$

из условия минимума должно быть определено также положительное число α. Техника подобных вычислений развита настолько, что не представляет труда провести расчет с очень большим числом вариационных параметров и получить, в частности, для наименьшего собственного значения ответ, правильный во многих разрядах. Впрочем, в высоких десятичных разрядах начинают сказываться погрешности в выборе модели. При желании получить более точные результаты в оператор энергии должны быть введены дополнительные члены, учитывающие *движение ядра, эффекты теории относительности* и некоторые более тонкие физические эффекты.

ГЛАВА IV

ОБЩАЯ ФОРМА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ

§ 1. Функционалы на кривых

А. ОБЩАЯ ФОРМА ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ

68. Кривая. В приложениях наряду с функционалами, аргументами которых являются функции или вектор-функции, столь же часто приходится иметь дело с функционалами, аргументами которых являются *кривые* в пространстве $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 2$. Так как всякой вектор-функции можно сопоставить кривую — *график* этой функции, то переход к функционалам на кривых можно рассматривать как обобщение прежней задачи. Результаты, которые мы получим для таких функционалов, не будут, однако, простым обобщением уже известных нам, например, из гл. I. Переход к функционалам на кривых приводит к новым точкам зрения и позволяет получить существенно новые результаты, в том числе и для функционалов на вектор-функциях.

Напомним определение кривой. Читателю, конечно, известно, что идея кривой может быть формализована по-разному. Мы будем придерживаться определения, принятого в *теории криволинейных интегралов*. Предварительным является понятие параметризованной кривой. *Параметризованной кривой класса* C^r, $r \geqslant 1$, *в пространстве* $\mathbf{R}^m$ *называется вектор-функция* $\zeta : \Delta = [a, b] \to \mathbf{R}^m$ *класса* C^r, *производная которой всюду отлична от нуля*: $\zeta'(\tau) \neq 0$. *Две параметризованные кривые* $\zeta : \Delta \to \mathbf{R}^m$ *и* $\zeta_1 : \Delta_1 = [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^m$ *класса* C^r *называются эквивалентными, если существует такая функция* $\varkappa : \Delta_1 \to \Delta$ *класса* C^r, *что выполняется равенство* $\zeta_1 = \zeta \circ \varkappa$ *и* $\operatorname{Im} \varkappa = \Delta$. * Формула $\zeta_1' = \varkappa' \cdot \zeta' \circ \varkappa$ показывает, что $\varkappa'(\tau) \neq 0$, $\tau \in \Delta_1$, так что $\varkappa$ — *монотонная функция. Переход от параметризованной кривой* ζ *к параметризованной кривой* ζ_1 *называется заменой параметра.* Ясно, что множества $\operatorname{Im} \zeta$ и $\operatorname{Im} \zeta_1$, множества точек в $\mathbf{R}^m$, совпадают для отображений ζ и ζ_1, которые отличаются заменой параметра. Совпадают также и множества *гранич-*

---

* $\operatorname{Im} F$, где $F : E \to \tilde{E}$ — некоторое отображение, обозначает *множество значений отображения*; другой термин — *образ отображения* F.

ных точек: $\{\zeta(a), \ \zeta(b)\} = \{\zeta_1(a_1), \ \zeta_1(b_1)\}$, а также *множества точек самопересечения,* т. е. таких точек из множества $\operatorname{Im}\zeta(=\operatorname{Im}\zeta_1)$, прообразы которых неединственны.

Кривой (стандартное обозначение — γ) *класса* C^r *в* $\mathbf{R}^m$ *называется класс эквивалентных параметризованных кривых класса* C^r *в* $\mathbf{R}^m$, *иными словами — параметризованная кривая, рассматриваемая с точностью до замены параметра.*

Каждой кривой соответствуют определенное множество точек в $\mathbf{R}^m$, *множество точек кривой*, а также определенное множество *граничных точек и точек самопересечения. Параметризованная кривая по отношению к соответствующей кривой называется ее параметризацией*. Кривая, не имеющая точек самопересечения, называется *простой. Если кривая проста, то множество ее точек определяет параметризацию* (с точностью до эквивалентности) Это значит, что простая кривая может быть отождествлена с множеством своих точек. Если кривая не проста, множество ее точек не позволяет восстановить параметризацию; если выражаться несколько нестрого, дополнительно следует указать способы *перехода с ветви на ветвь в точках самопересечения.* С каждой точкой z простой кривой γ (пишем: $z \in \gamma$) можно связать одномерное подпространство, порожденное вектором $\zeta'(\tau)$, где ζ — такая параметризация, что $z = \zeta(\tau)$. Это подпространство называется *касательным к кривой в точке z,* а его векторы — *касательными векторами к γ в точке z.*

Пусть γ — кривая и $\{x_1, \ x_2\}$ — ее граничные точки, причем $x_1 \neq x_2$. *Кривая γ называется ориентированной, если в множестве $\{x_1, \ x_2\}$ введено упорядочение,* при этом первая по порядку точка, например x_1, называется *началом кривой*, вторая, x_2 — *ее концом*. Кривая может быть превращена в ориентированную двумя разными способами. *Параметризация $\zeta : \Delta \to \mathbf{R}^m$ называется согласованной с ориентацией, если $\zeta(a) = x_1$, $\zeta(b) = x_2$.* Две эквивалентные параметризации ζ_1 и ζ_2 тогда и только тогда согласованы с одной и той же ориентацией, когда связывающая их функция $\varkappa : \zeta_1 = \zeta \circ \varkappa$ имеет *положительную производную*. Последнее обстоятельство позволяет распространить определение ориентированной кривой на общий случай, когда, быть может, $x_1 = x_2$.

Длиной кривой γ называется положительное число

$$d(\gamma) = \int_\Delta \| \zeta'(\tau) \| \, d\tau,$$

где $\zeta : \Delta \to \mathbf{R}^m$ — какая-либо параметризация кривой. *Длина не зависит от выбора параметризации*:

$$\int_{\Delta_1} \| \zeta_1'(\tau) \| \, d\tau = \int_{\Delta_1} \| \zeta'(\varkappa(\tau)) \, \varkappa'(\tau) \| \, d\tau =$$
$$= \int_{\Delta_1} \| \zeta'(\varkappa(\tau)) \| \, | \varkappa'(\tau) | \, d\tau = \int_\Delta \| \zeta'(\sigma) \| \, d\sigma.$$

В последнем преобразовании из этой цепочки проведена замена переменной интегрирования $\tau \to \sigma = \varkappa(\tau)$.

В заключение введем понятие *отрезка кривой* γ. Если $\zeta:\Delta\to\mathbf{R}^m$ — параметризация кривой γ, то ограничение отображения ζ на любой подынтервал Δ' интервала Δ — параметризованная кривая. Отвечающая ей кривая называется *отрезком кривой* γ.

Поверхность. Обобщая понятие кривой, введем k-мерную поверхность, короче k-поверхность, класса C^r в $\mathbf{R}^m$, $1\leqslant k\leqslant m$. *Параметризованной k-поверхностью класса C^r в $\mathbf{R}^m$ назовем вектор-функцию $\Phi:D\to\mathbf{R}^m$, заданную на области D пространства $\mathbf{R}^k$, производная Φ' которой всюду невырождена.* Отметим, что в отличие от параметризованной 1-поверхности, которая должна задаваться на открытом, может быть бесконечном, интервале, параметризованная кривая задавалась на конечном замкнутом интервале. На системе дальнейших определений это отличие не сказывается.

Две параметризованные k-поверхности $\Phi:D\to\mathbf{R}^m$ и $\Phi_1:D_1\to\mathbf{R}^m$ класса C^r назовем эквивалентными, если существует отображение $K:D_1\to D$ класса C^r, обладающее следующими свойствами: 1) $\operatorname{Im}K=D$, K *обратимо и* $K^{-1}\in C^r$, 2) $\Phi_1=\Phi\circ K$. Отметим, что при выполнении 1) производная K' отображения K всюду невырождена.

k-поверхностью M класса C^r в $\mathbf{R}^m$ назовем класс эквивалентных параметризованных k-поверхностей класса C^r в $\mathbf{R}^m$.

Всякая параметризованная k-поверхность, принадлежащая данному классу, т. е. k-поверхности, называется *параметризацией поверхности*. Каждой k-поверхности M в $\mathbf{R}^m$ соответствует определенное множество точек в $\mathbf{R}^m$, *множество точек поверхности M*, которое является образом параметризации и не зависит от ее выбора. k-поверхность M назовем *простой*, если ее параметризация — обратимое отображение. Простая k-поверхность определяется множеством своих точек и, таким образом, может быть отождествлена с этим множеством. Пусть M — простая k-поверхность в $\mathbf{R}^m$ и z — точка M. *Касательным подпространством к поверхности M в точке z* (обозначение M_z) *называется k-мерное подпространство в $\mathbf{R}^m$, которое является образом* $\operatorname{Im}\Phi'(\xi)$ *оператора* $\Phi'(\xi)$, *где Φ — такая параметризация M, что* $z=\Phi(\xi)$. Так как $\Phi_1'(\xi)=\Phi'(K(\xi))K'(\xi)$ и $K'(\xi)$ — невырожденный оператор, это определение не зависит от выбора параметризации Φ.

$(m-1)$-поверхность в $\mathbf{R}^m$ называется *гиперповерхностью*. Каждой точке z простой гиперповерхности можно сопоставить одномерное подпространство в $\mathbf{R}^m$, ортогональное к касательному подпространству M_z. Всякий ненулевой вектор этого подпространства называется *вектором нормали к гиперповерхности M в точке z*.

69. Пространство кривых. На множестве кривых не существует естественной векторной структуры и, тем самым, не существует естественной структуры нормированного пространства. На множестве ориентированных кривых можно, однако, ввести естественную структуру метрического пространства, причем это метрическое пространство можно рассматривать как нелинейное множество в подходящем нормированном пространстве. Цель будет достигнута, если из множества параметризаций данной ориентированной кривой выбрать некоторую каноническую, т. е. стандартную параметризацию, заданную на определенном интервале, например $[0,1]$. В таком случае множество ориентированных кривых класса C^r можно будет рассматривать как подмножество в векторном пространстве отображений $[0,\ 1]\to\mathbf{R}^m$ класса C^r. Задавая на этом пространстве норму и превращая его в нормированное, одновременно превращаем его подмножество, множество ориентированных кривых, в метрическое пространство.

Параметризацию $\xi:[0,\ 1]\to\mathbf{R}^m$ *ориентированной кривой назовем канонической, если* $\|\xi'(\tau)\|=\mu$, μ — *постоянная, с необходимостью* $\mu>0$.

Убедимся, что *каждая ориентированная кривая обладает единственной канонической параметризацией*. Пусть $\zeta:\Delta\to\mathbf{R}^m$ — произвольная параметризация заданной ориентированной кривой. Будем искать каноническую параметризацию ξ в виде $\xi=\zeta\circ\varkappa$. Функция $\varkappa$ должна удовлетворять следующим условиям: 1) $\varkappa$ определена на интервале $[0,1]$, $\mathrm{Im}\varkappa=[a,\ b]$, 2) $\varkappa'(\tau)>0$, 3) $\|\zeta'(\varkappa(\tau))\|\times\times|\varkappa'(\tau)|=\mu$. Учитывая, что $\mu>0$, условия 2) и 3) можно заменить одним условием $\|\zeta'(\varkappa(\tau))\|\varkappa'(\tau)=\mu$, которое представляет собой дифференциальное уравнение для $\varkappa$. Это уравнение имеет очевидный интеграл:

$$\int_a^\varkappa\|\zeta'(\varkappa)\|\,d\varkappa-\mu\tau=c.$$

Так как функция $\varkappa\to\int_a^\varkappa\|\zeta'(\varkappa)\|\,d\varkappa$ монотонна, из приведенного интеграла можно определить функцию $\tau\to\varkappa(\tau)$. Условие 1) фиксирует параметры: $c=0$, $\mu=d(\gamma)$. Итак, действительно, каждая ориентированная кривая γ обладает единственной канонической параметризацией, при этом $\mu=d(\gamma)$.

Каноническая параметризация имеет простой геометрический смысл, который оправдывает ее естественность: *параметр* τ *канонической параметризации* $\xi(\tau)$ *пропорционален длине отрезка кривой* γ, *параметризованного отображением* $\sigma\to\xi(\sigma)$, $\sigma\in[0,\ \tau]$:

$$\mu\tau=\int_0^\tau\|\xi'(\sigma)\|\,d\sigma.$$

Обозначим множество ориентированных кривых класса C^r в $\mathbf{R}^m$ через Γ_m^r. Сопоставив каждой кривой γ, $\gamma\in\Gamma_m^r$, каноническую параметризацию ξ, погружаем Γ_m^r в множество вектор-функций $[0,1]\to\mathbf{R}^m$ класса C^r. Задав на вектор-функциях любую норму $\xi\to\|\xi\|$, превращаем Γ_m^r в метрическое пространство: расстояние $d(\gamma_1,\ \gamma_2)$ от кривой γ_1 до кривой γ_2 есть

$$d(\gamma_1,\ \gamma_2)=\|\xi_1-\xi_2\|,$$

ξ_i — каноническая параметризация γ_i, $i=1,\ 2$. В приложениях обычно используется пространство $C^1([0,\ 1]\to\mathbf{R}^m)$. Соответствующее метрическое пространство, элементами которого являются ориентированные кривые класса C^1 в $\mathbf{R}^m$, обозначим $C^1(\Gamma_m)$. Две ориентированные кривые, близкие в пространстве $C^1(\Gamma_m)$, близки, очевидно, и в следующем наглядном смысле: всякая точка одной из кривых близка в $\mathbf{R}^m$ к некоторой точке другой кривой, угол между касательными подпространствами в этих двух точках мал, начало и конец одной кривой близки к началу и концу другой.

70. Интегральные функционалы. *Интегральный функционал* на $C^1(\Gamma_m)$ определяется формулой

$$\gamma\to J(\gamma)=\int_\Delta F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau,$$

где $F(z, w)$ — гладкая функция на множестве $\{(z, w): z, w \in \in \mathbf{R}^m, w \neq 0\}$, удовлетворяющая *условию однородности*

$$F(z, \lambda w) = F(z, w)|\lambda|, \ \lambda \neq 0.$$

Условию однородности удовлетворяет, например, функция $F(z, w) = \|w\|$. Если положить $F(z, 0) = 0$, то функция F будет определена и непрерывна на $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$. В определении функционала ζ — параметризация кривой γ (не обязательно согласованная с ориентацией).

Интеграл $J(\gamma)$ *не зависит от выбора параметризации кривой* γ, так что определение функционала J корректно. Доказательство независимости использует условие однородности и является буквальным повторением приведенной в п. 68 выкладки, которая показывает, что длина кривой не зависит от параметризации.

Введем интегральный функционал $\hat{J}$ на $C^1([0,1] \to \mathbf{R}^m)$, полагая

$$\hat{J}(\xi) = \int_0^1 F(\xi(\tau), \xi'(\tau))\, d\tau.$$

Справедливо равенство

$$J(\gamma) = \hat{J}(\xi),$$

где ξ — каноническая параметризация ориентированной кривой γ. Отсюда, в частности, следует, что функционал J непрерывен на $C^1(\Gamma_m)$. Благодаря последней формуле исследование функционала J на $C^1(\Gamma_m)$ может быть погружено в рамки абстрактной задачи Лагранжа для функционала $\hat{J}$ на пространстве $C^1([0,1] \to \to \mathbf{R}^m)$ наложением связи вида $\|\xi'(\tau)\| - \|\xi'(0)\| = 0$. Позднее мы воспользуемся этой идеей, которая создает надежную основу для экстремальных задач, но постоянно следовать ей не будем, так как она вынуждает рассматривать только каноническую параметризацию, удобную для определения метрики во множестве кривых, но не удобную во многих геометрических и формульных вопросах.

Примеры. Всем наложенным выше условиям удовлетворяет функция F вида

$$F(z, w) = (A(z)w, w)^{1/2},$$

где $A(z)$, $z \in \mathbf{R}^m$, — гладко зависящий от z положительный оператор в $\mathbf{R}^m$. В этом случае

$$J(\gamma) = \int_\Delta (A(\zeta(\tau))\zeta'(\tau), \zeta'(\tau))^{1/2} d\tau. \qquad (1)$$

Если $A(z) = l^2(z) I$, где I — тождественный оператор, а l — гладкая функция на $\mathbf{R}^m$, то функционал J сводится к криволинейному интегралу

$$J(\gamma) = \int_\Delta l(\zeta(\tau)) \|\zeta'(\tau)\|\, d\tau = \int_\gamma l(z)\, ds.$$

Функционал (1) допускает разнообразные интерпретации. Опишем две из них.

1) Геометрическая интерпретация. Рассмотрим m-поверхность M в $\mathbf{R}^N$. Пусть $\Phi: D \to \mathbf{R}^N$, $D \subset \mathbf{R}^m$, — параметризация поверхности M. Параметризованной кривой $\zeta: \Delta \to \mathbf{R}^m$, точки которой принадлежат D (короче: параметризованной кривой ζ на D), соответствует параметризованная кривая $\zeta^\Phi = \Phi \circ \zeta: \Delta \to \mathbf{R}^N$ на M. Преобразование $\zeta \to \zeta^\Phi$ порождает преобразование кривой γ на D в кривую γ^Φ на M. Произвольная кривая на M является кривой вида γ^Φ. Положим $J(\gamma) = d(\gamma^\Phi)$. Имеем

$$J(\gamma) = \int_\Delta \left\| \frac{d}{d\tau} \Phi(\zeta(\tau)) \right\|_{\mathbf{R}^N} d\tau.$$

Вычислим $\left\| \frac{d}{d\tau} \Phi(\zeta(\tau)) \right\|$:

$$\left\| \frac{d}{d\tau} \Phi(\zeta(\tau)) \right\|_{\mathbf{R}^N} = \| \Phi'(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau) \|_{\mathbf{R}^N} =$$

$$= (\Phi'(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau),\ \Phi'(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau))^{1/2}_{\mathbf{R}^N} = (A(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau),\ \zeta'(\tau))^{1/2}_{\mathbf{R}^m},$$

где

$$A(z) = \Phi'^*(z) \Phi'(z). \tag{2}$$

Оператор $A(z)$ положителен. Таким образом,

$$J(\gamma) = \int_\Delta (A(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau),\ \zeta'(\tau))^{1/2}\, d\tau.$$

Мы убедились, что функционалом вида (1) является длина кривой на параметризованной поверхности. Этот пример является универсальным. При очень общих условиях произвольное отображение $z \to A(z)$, $z \in D$, $A(z)$ — положительный оператор в $\mathbf{R}^m$, может быть представлено в виде (2), где Φ — некоторое гладкое отображение $D \to \mathbf{R}^N$. Отображение Φ определяется равенством (2) неоднозначно, и поверхности M, связанные с данным функционалом J, могут очень по-разному располагаться в пространстве $\mathbf{R}^N$, не говоря уже о том, что размерность N также не определяется равенством (2) и может быть выбрана сколь угодно большой. Поэтому, хотя при исследовании интегральных функционалов вида (1) постоянно используется геометрическая терминология, обусловленная возможностью рассматривать значение функционала как длину кривой на поверхности, сама поверхность обычно не строится и вопрос о ее построении часто даже не обсуждается.

2) Оптическая интерпретация. *Пусть пространство* $\mathbf{R}^3$ *заполнено неоднородной изотропной средой, в которой может распространяться свет. Скорость* c *распространения* света дается формулой $c(z) = c_0 l^{-1}(z)$, где c_0 — *скорость распространения света в пустоте*, а l — *показатель преломления среды*. Время, необходимое свету, чтобы пробежать со скоростью c вдоль кривой γ, дается интегралом

$$T(\gamma) = \int_\Delta c^{-1}(\zeta(\tau)) \| \zeta'(\tau) \| \, d\tau = \int_\gamma c_0^{-1} l(z)\, ds,$$

$\zeta: \Delta \to \mathbf{R}^3$ — параметризация кривой γ.

В *анизотропной среде* скорость распространения света $c(z, v)$ зависит не только от точки z, но и от направления v, $\|v\|=1$, распространения света. В этом случае

$$T(\gamma)=\int_\Delta c^{-1}\left(\zeta(\tau),\ \frac{\zeta'(\tau)}{\|\zeta'(\tau)\|}\right)\|\zeta'(\tau)\|\,d\tau=\int_\Delta F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau,$$

где $F(z, w)=c^{-1}(z, w/\|w\|)\|w\|$. Функция F имеет в этом примере общий вид.

71. Параметрическая форма интегрального функционала. Нетрудно дать общий вид функции, удовлетворяющей условию однородности $F(z, \lambda w)=F(z, w)|\lambda|$. Запишем вектор из $\mathbf{R}^m$, $m=1+n$, в виде пары векторов $z=(z_0, \mathbf{z})$, $z_0\in\mathbf{R}$, $\mathbf{z}=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbf{R}^n$. Если $w\in\mathbf{R}^m$ и $w_0\neq 0$, то

$$F(z, w)=F(z, ww_0^{-1}w_0)=F(z, ww_0^{-1})|w_0|=F(z, (1, \mathbf{w}w_0^{-1}))|w_0|.$$

Положим

$$L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w})=F(z, (1, \mathbf{w})), \tag{3}$$

тогда

$$F(z, w)=L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}w_0^{-1})|w_0|. \tag{4}$$

Таким образом, на аргументах, удовлетворяющих условию $w_0\neq 0$, функция F имеет вид (4). Считая функцию L произвольной, получим общий вид F на таких аргументах. Это следует из того факта, что правая сторона (4) удовлетворяет условию однородности при произвольной L:

$$L(z_0, \mathbf{z}, (\lambda\mathbf{w})(\lambda w_0)^{-1})|\lambda w_0|=L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}w_0^{-1})|w_0||\lambda|.$$

Мы не будем обсуждать вопрос, какие свойства функции L обеспечивают непрерывность функции F при $w_0=0$.

Пример. Если $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})=l(t, \mathbf{x})(1+\mathbf{v}^2)^{1/2}$, то $F(z, w)=l(z_0, \mathbf{z})\|w\|$.

Интегральному функционалу

$$I(\mathbf{f})=\int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\,dt$$

на $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$ можно сопоставить интегральный функционал J на $C^1(\Gamma_m)$, определяя F формулой (4):

$$J(\gamma)=\int_\Delta L(\zeta_0(\tau), \boldsymbol{\zeta}(\tau), \boldsymbol{\zeta}'(\tau)/\zeta_0'(\tau))|\zeta_0'(\tau)|\,d\tau.$$

Обратно, интегральному функционалу J на $C^1(\Gamma_m)$ можно сопоставить интегральный функционал I на $C^1(\Delta\to\mathbf{R}^n)$, определяя L формулой (3):

$$I(\mathbf{f})=\int_\Delta F((t, \mathbf{f}(t)), (1, \mathbf{f}'(t)))\,dt.$$

Так как формулы (3), (4) взаимно-обратны, то взаимно-обратны и преобразования $I\to J$ и $J\to I$. *Функционал J называют параметрической формой функционала I.*

Сопоставим вектор-функции $\mathbf{f}\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ кривую γ, параметризованную отображением $\zeta(\tau) = (\tau, \mathbf{f}(\tau))$. Так как $\zeta'(\tau) = (1, \mathbf{f}'(\tau))$, то $\zeta'_0(\tau) = 1$, $\boldsymbol{\zeta}'(\tau) = \mathbf{f}'(\tau)$, поэтому $J(\gamma) = I(\mathbf{f})$, где J и I — функционалы, связь которых описана выше. Если кривая γ в $\mathbf{R}^m$ допускает параметризацию вида $\tau \to (\tau, \mathbf{f}(\tau))$, где $\mathbf{f}\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$, $n = m - 1$, то условимся говорить, что γ является *графиком*, подробнее *графиком пары* $\{\Delta, \mathbf{f}\}$, а саму эту параметризацию (она единственна) будем называть *t-параметризацией кривой* γ. *Для того чтобы кривая γ была графиком, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\zeta'_0(\tau) \neq 0. \tag{5}$$

При выполнении условия (5) $\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\zeta}(\zeta_0^{-1}(t))$.

Итак, между графиками γ и парами вида $\{\Delta, \mathbf{f}\}$ существует взаимно-однозначное соответствие, при котором выполняется равенство $J(\gamma) = I(f)$. Указанное соответствие позволяет рассматривать множество пар вида $\{\Delta, \mathbf{f}\}$ как подмножество в метрическом пространстве и тем самым как метрическое пространство. Благодаря этому приобретают смысл более общие экстремальные задачи для функционала I, чем те, которые изучались в предыдущих главах, а именно экстремальные задачи на множестве вектор-функций с различным, не фиксированным интервалом определения. Более того, соотношение $I(f) = J(\gamma)$ позволяет рассматривать экстремальные задачи для функционала I как экстремальные задачи для функционала J, заданного на более широком пространстве, на множестве кривых, и затем ограниченного на открытое подмножество, множество графиков.

Переход от функционала I к функционалу J тесно связан с приемом, хорошо известным из теории дифференциальных уравнений. Вместо скалярного уравнения $f'(t) = F(t, f(t))$, в котором функция F неограничена, бывает полезно перейти к системе уравнений

$$\varphi'(\tau) = F_1(\varphi(\tau), \psi(\tau)), \quad \psi'(\tau) = F_2(\varphi(\tau), \psi(\tau)),$$

в которых F_1 и F_2 — ограниченные функции, связанные соотношением $F = F_2/F_1$. Отображение $\tau \to (\varphi(\tau), \psi(\tau))$ определяет кривую γ на плоскости $\mathbf{R}^2$. Если $\varphi'(\tau) \neq 0$, то кривая γ является графиком некоторой функции f. Если при этом $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ — решение системы, то f — решение первоначального уравнения. Может, однако, случиться, что на каком-то множестве производная φ' равна нулю. На языке первоначального уравнения это означает появление особенностей у решения $f = \psi \circ \varphi^{-1}$. Ясно, что переход от функции f к паре (φ, ψ), позволяющий изучать особенности решений, — полезный прием. Более того, с точки зрения приложений интерес часто представляет именно кривая γ, а не функция f. Изложенные соображения сохраняют смысл и для уравнения Эйлера. Позднее мы убедимся, что подобное преобразование уравнения Эйлера равносильно описанному выше переходу $I \to J$.

Отметим в заключение, что множество пар $\{\Delta, \mathbf{f}\}$ при фиксированном интервале Δ по набору элементов совпадает с $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Кроме расстояния, порожденного на этом множестве расстоянием в $C^1(\Gamma_m)$, на нем можно рассматривать расстояние, порожденное нормой пространства $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Эти два расстояния различны, но тот факт, что $\mathbf{f}\colon \Delta \to \mathbf{R}^n$ — точка экстремума, не зависит от выбора того или иного из них. Это объясняется тем, что *указанные расстояния эквивалентны на любом множестве пар, длины графиков которых ограничены наперед заданным числом.*

Говорят, что расстояния ρ_1 и ρ_2 на метрическом пространстве E *эквивалентны*, если существуют такие положительные числа μ и ν, что

$$\mu\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \nu\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

72. Дифференцирование функционала на пространстве кривых. Пространство кривых нелинейно и представляет собой некоторое подобие поверхности в множестве отображений $[0, 1] \to \mathbf{R}^m$. Мы не будем развивать систематического дифференциального исчисления на подобных пространствах и *ограничимся вычислением производных интегрального функционала вдоль путей специального вида — для приложений этого достаточно.*

Путь во множестве кривых обычно задается как путь в множестве параметризованных кривых. Предположим, что на некотором интервале δ заданы две гладкие, например непрерывно дифференцируемые функции, функции a и b, причем $a < b$. Положим $\Delta(\alpha) = [a(\alpha), b(\alpha)]$. Пусть далее на множестве $D = \{(\tau, \alpha)\colon \tau \in \Delta(\alpha), \alpha \in \delta\}$ задано отображение $\zeta\colon D \to \mathbf{R}^m$, удовлетворяющее условию $\zeta_\tau(\tau, \alpha) \neq 0$. Этим определен путь в множестве ориентированных кривых: при фиксированном α отображение $\zeta(\cdot, \alpha)\colon \Delta(\alpha) \to \mathbf{R}^m$ является параметризацией некоторой кривой γ_α. Будем предполагать, что отображение ζ принадлежит $C^1(D \to \mathbf{R}^m)$, и, кроме того, существует непрерывная смешанная производная $\zeta_{\tau\alpha}$. Назовем соответствующий путь $\alpha \to \gamma_\alpha$ гладким. Ясно, что этот путь непрерывен.

Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = J(\gamma_\alpha)$, где J — интегральный функционал на $C^1(\Gamma_m)$, подробнее:

$$\varphi(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} F(\zeta(\tau, \alpha), \zeta_\tau(\tau, \alpha))\, d\tau.$$

Прежде чем перейти к вычислению производной функции φ, сформулируем вспомогательное предложение. Пусть $\lambda \in C^1(\delta)$, причем $\lambda > a$. Пусть на множестве вида $D = \{(\tau, \alpha)\colon \tau \in [a, \lambda(\alpha)], \alpha \in \delta\}$ определена функция ψ, непрерывная и имеющая непрерывную частную производную по второму аргументу. Рассмотрим на δ функцию

$$j(\alpha) = \int_a^{\lambda(\alpha)} \psi(\tau, \alpha)\, d\tau.$$

Лемма. *Функция j непрерывно дифференцируема, причем*

$$j'(\alpha) = \psi(\lambda(\alpha), \alpha)\lambda'(\alpha) + \int_a^{\lambda(\alpha)} \psi_\alpha(\tau, \alpha)\, d\tau.$$

Если бы функция j могла рассматриваться как ограничение на диагональ $\alpha=\beta$ заданной в окрестности этой диагонали функции двух переменных

$$k(\alpha, \beta)=\int_a^{\lambda(\alpha)} \psi(\tau, \beta)\, d\tau,$$

то утверждение леммы было бы очевидным. Однако функция $\tau \to \psi(\tau, \alpha)$ определена лишь на интервале $[a, \lambda(\alpha)]$ и поэтому функция k определена лишь на диагонали. Впрочем, согласно

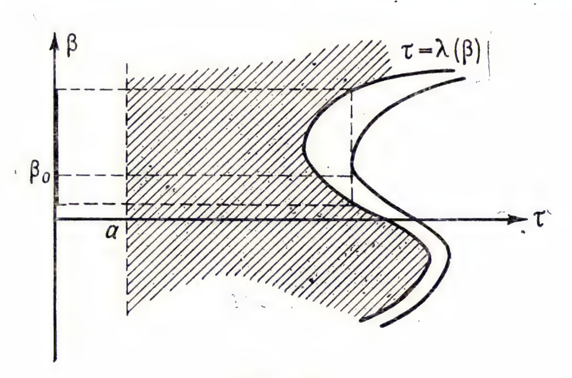


Рис. 19.

определению дифференцируемости функции в граничных точках множества функция ψ может быть с сохранением гладкости продолжена на открытое множество, содержащее D. При этом функция k оказывается заданной в окрестности диагонали, что и приводит к утверждению леммы. На рис. 19 заштриховано множество D, справа показана граница области, на которую можно распространить функцию ψ. На оси ординат отмечен интервал, в котором можно менять переменную α, не выходя из области определения распространенной функции ψ, содержащей заданную точку β_0. Вернемся к функции φ. Из леммы следует, что для гладкого пути γ_α φ — гладкая функция, причем

$$\varphi'(\alpha)=\int_{\Delta(\alpha)} [(\nabla_z F(\zeta, \zeta_\tau), \zeta_\alpha(\tau, \alpha))+(\nabla_w F(\zeta, \zeta_\tau), \zeta_{\tau\alpha}(\tau, \alpha))]\, d\tau + $$
$$+F(\zeta(b(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha))\, b'(\alpha)-F(\zeta(a(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(a(\alpha), \alpha))\, a'(\alpha).$$

Если дополнительно предположить, что функция ζ имеет непрерывную частную производную $\zeta_{\tau\tau}$, то стандартное интегрирование по частям даст

$$\varphi'(\alpha)=\int_{\Delta(\alpha)} (F[\zeta(\cdot, \alpha)](\tau), \zeta_\alpha(\tau, \alpha))\, d\tau +$$
$$+[F(\zeta(b(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha)\, b'(\alpha)+(\nabla_w F(\ldots), \zeta_\alpha(b(\alpha), \alpha))]-$$
$$-[F(\zeta(a(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(a(\alpha), \alpha)\, a'(\alpha)+(\nabla_w F(\ldots), \zeta_\alpha(a(\alpha), \alpha))].$$

Воспользуемся формулой $\frac{d}{d\alpha}\zeta(b(\alpha), \alpha) = \zeta_\alpha(b(\alpha), \alpha) + \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha)\, b'(\alpha)$ и аналогичной формулой, которая получается при замене b на a:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} (F[\zeta(\cdot, \alpha)](\tau),\ \zeta_\alpha(\tau, \alpha))\, d\tau +$$
$$+ \Big\{[F(\zeta(b(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha)) - (\nabla_w F(\ldots), \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha))]\, b'(\alpha) +$$
$$+ (\nabla_w F(\ldots), \frac{d}{d\alpha}\zeta(b(\alpha), \alpha))\Big\} - \Big\{[F(\zeta(a(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(a(\alpha), \alpha)) -$$
$$- (\nabla_w F(\ldots), \zeta_\tau(a(\alpha), \alpha))]\, a'(\alpha) + (\nabla_w F(\ldots), \frac{d}{d\alpha}\zeta(a(\alpha), \alpha))\Big\}.$$

Так как F — функция, однородная по второму аргументу, для нее выполняется следующее уравнение (*уравнение Эйлера для однородной функции*):

$$F(z, w) = (\nabla_w F(z, w), w).$$

Поэтому

$$\varphi'(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} (F[\zeta(\cdot, \alpha)](\tau), \zeta_\alpha(\tau, \alpha))\, d\tau +$$
$$+ (\nabla_w F(\zeta(b(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha)), \frac{d}{d\alpha}\zeta(b(\alpha), \alpha)) -$$
$$- (\nabla_w F(\zeta(a(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(a(\alpha), \alpha)), \frac{d}{d\alpha}\zeta(a(\alpha), \alpha)).$$

Производные $\frac{d}{d\alpha}\zeta(a(\alpha), \alpha)$ и $\frac{d}{d\alpha}\zeta(b(\alpha), \alpha)$ имеют простой геометрический смысл, они являются *скоростями концов кривой* γ_α при изменении α.

Левая сторона формулы для φ' зависит только от пути γ_α в пространстве кривых. Поэтому правая сторона сохранит свою величину, если вычислить ее не на пути $\zeta(\cdot, \alpha)$ в множестве параметризованных кривых, а на любом другом пути $\zeta_1(\cdot, \alpha)$, который порождает тот же самый путь γ_α в пространстве кривых. Будем называть это свойство формулы для φ' *инвариантностью относительно параметризации*.

Общая форма первой вариации. Выразим результат в терминах функции L:

$$F(z, w) = L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}/w_0)\,|w_0|, \quad w_0 \neq 0$$

(см. п. 71). Непосредственное дифференцирование дает

$$F_{z_0}(z, w) = L_t(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}/w_0)\,|w_0|, \quad \nabla_{\mathbf{z}} F(z, w) = \nabla_{\mathbf{x}} L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}/w_0)\,|w_0|,$$
$$F_{w_0}(z, w) = \operatorname{sign} w_0 [L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}/w_0) - (\nabla_{\mathbf{v}} L(z_0, \mathbf{z}, w/w_0), \mathbf{w}/w_0)],$$
$$\nabla_{\mathbf{w}} F(z, w) = \operatorname{sign} w_0 \nabla_{\mathbf{v}} L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}/w_0).$$

Отсюда следует

$$F_0[\zeta] = (F[\zeta])_0 = \operatorname{sign} \zeta_0' \Big\{\zeta_0' L_t - \frac{d}{d\tau}[L - (\nabla_{\mathbf{v}} L, \zeta'/\zeta_0')]\Big\},$$
$$\mathbf{F}[\zeta] = ((F[\zeta])_1, \ldots, (F[\zeta])_n) = \operatorname{sign} \zeta_0' \Big(\zeta_0' \nabla_{\mathbf{x}} L - \frac{d}{d\tau} \nabla_{\mathbf{v}} L\Big).$$

Здесь справа $L = L(\zeta_0, \zeta, \zeta'/\zeta_0')$.

Предположим, что *кривая* γ_α *является графиком*. Введем на ней t-параметризацию: $\zeta(\tau, \alpha) = (\tau, \mathfrak{f}(\tau, \alpha))$. Тогда

$$F_{w_0}(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)) = -\hat{H}(\tau, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}'), \ \nabla_w F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)) = \hat{p}(\tau, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}'),$$

$$\mathbf{F}_0[\zeta](\tau) = L_t(\tau, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}') - \frac{d}{d\tau}\hat{H}(\tau, \mathfrak{f}, \mathfrak{f}'),$$

$$\mathbf{F}[\zeta](\tau) = L[\mathfrak{f}](\tau).$$

Функции $\hat{H}$ и $\hat{p}$ определены в п. 9. Подставляя эти выражения в формулу для φ', получаем

$$\varphi'(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} (L[\mathfrak{f}(\cdot, \alpha)](t), \mathfrak{f}_\alpha(t, \alpha))\,dt +$$
$$+ \left\{(\hat{p}(b(\alpha), \mathfrak{f}(b(\alpha), \alpha), \mathfrak{f}_t(b(\alpha), \alpha)), \frac{d\mathfrak{f}(b(\alpha), \alpha)}{d\alpha}) - \hat{H}(\ldots)\,b'(\alpha)\right\} -$$
$$- \left\{(\hat{p}(a(\alpha), \mathfrak{f}(a(\alpha), \alpha), \mathfrak{f}_t(a(\alpha), \alpha)), \frac{d\mathfrak{f}(a(\alpha), \alpha)}{d\alpha}) - \hat{H}(\ldots)\,a'(\alpha)\right\}.$$

Это соотношение обычно называется *общей формой первой вариации.*

Б. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

73. Уравнение Эйлера. Для производной интегрального функционала вдоль пути γ_α в пространстве кривых в предыдущем разделе была получена формула

$$\varphi'(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} (F[\zeta(\cdot, \alpha)](\tau), \zeta_\alpha(\tau, \alpha))\,d\tau +$$
$$+ \left(\nabla_w F(\zeta(b(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(b(\alpha), \alpha)), \frac{d\zeta(b(\alpha), \alpha)}{d\alpha}\right) -$$
$$- \left(\nabla_w F(\zeta(a(\alpha), \alpha), \zeta_\tau(a(\alpha), \alpha)), \frac{d\zeta(a(\alpha), \alpha)}{d\alpha}\right).$$

Если граничные точки кривых γ_α не зависят от α, то

$$\varphi'(\alpha) = \int_{\Delta(\alpha)} (F[\zeta(\cdot, \alpha)](\tau), \zeta_\alpha(\tau, \alpha))\,d\tau. \qquad (6)$$

Условимся называть путь γ_α *вариацией кривой* $\gamma = \gamma_0$. Если граничные точки кривых γ_α не зависят от α, назовем вариацию кривой γ *вариацией с неподвижными концами*. Пусть $\zeta : \Delta \to \mathbf{R}^m$ — параметризация кривой γ. Примером вариации с неподвижными концами служит путь γ_α, порождаемый путем $\alpha \to \zeta + \alpha h$ во множестве параметризованных кривых, где $h : \Delta \to \mathbf{R}^m$, $h(a) = h(b) = 0$. При достаточно малых α вектор-функция $\zeta + \alpha h$ является параметризованной кривой. Для подобного пути

$$\varphi'(0) = \int_\Delta (F[\zeta](\tau), h(\tau))\,d\tau. \qquad (7)$$

Теорема. *Равенство* $\varphi'(0) = 0$ *выполняется для любой вариации кривой* γ *с неподвижными концами тогда и только тогда, когда параметризация* ζ *кривой* γ *удовлетворяет уравнению* $F[\zeta] = 0$.

Необходимость следует из формулы (7) и леммы Лагранжа, достаточность ясна из формулы (6).

Строго говоря, при доказательстве необходимости следует дополнительно предполагать, что кривая γ допускает параметризацию ζ, принадлежащую классу C^2, т. е. является кривой класса C^2.

Инвариантность уравнения $F[\zeta]=0$ относительно замены параметра. *Если* $\zeta_1=\zeta\circ\varkappa$, *то*

$$F[\zeta_1](\tau)=|\varkappa'(\tau)|\,F[\zeta](\varkappa(\tau)).$$

Для доказательства заметим, что два пути $\alpha\to\zeta+\alpha h$ и $\alpha\to\to\zeta_1+\alpha h\circ\varkappa$ во множестве параметризованных кривых отвечают одному и тому же пути в пространстве кривых. Поэтому

$$\varphi'(0)=\int_\Delta (F[\zeta](\tau),\ h(\tau))\,d\tau=\int_{\Delta_1}(F[\zeta_1](\tau),\ h(\varkappa(\tau)))\,d\tau.$$

Выполним в первом интеграле замену переменной интегрирования $\tau\to t$, $\tau=\varkappa(t)$ и сохраним для новой переменной прежнее обозначение, тогда

$$\int_\Delta (F[\zeta](\varkappa(\tau)),\quad h(\varkappa(\tau)))\,|\varkappa'(\tau)|\,d\tau=\int_\Delta (F[\zeta_1](\tau),\ h(\varkappa(\tau)))\,d\tau.$$

Ввиду произвольности h отсюда и следует объявленная формула. Из нее вытекает, что *уравнение* $F[\zeta]=0$ *характеризует не параметризацию, а кривую. Будем называть его уравнением Эйлера для кривой, а кривую, удовлетворяющую этому уравнению,— экстремалью функционала* J.

Переход от интегрального функционала на вектор-функциях к его параметрической форме, интегральному функционалу на кривых, можно толковать как *замену параметра*. Мы видим, в частности, что переход к параметрической форме в уравнении Эйлера равносилен получению уравнения Эйлера из параметрической формы соответствующего функционала.

Вырожденность уравнения Эйлера. Структура уравнения $F[\zeta]=0$ довольно своеобразна. Выше уже было использовано соотношение

$$F(z,\ w)=(w,\ \nabla_w F(z,\ w)),\qquad z,\ w\in\mathbf{R}^m,$$

которое отражает свойство однородности функции F. Продифференцируем это соотношение по w:

$$\nabla_w F(z,\ w)=\nabla_w F(z,\ w)+\nabla_w(w_1,\ \nabla_w F(z,\ w))\,|_{w_1=w}.$$

Так как

$$\nabla_w(w_1,\ \nabla_w F(z,\ w))=\nabla_w(F_w(z,\ w)\,w_1)=\nabla_w F_w(z,\ w)\,w_1,$$

то приходим к равенству

$$\nabla_w F_w(z,\ w)\,w=0.$$

Полученное равенство означает, что оператор $\nabla_w F_w(z,\ w)$ вырожден, ранг его матрицы не превосходит $n=m-1$ и вектор w

является его *собственным вектором*, отвечающим *нулевому собственному значению*. Возникшее положение *принципиально* отличается от того, которое рассматривалось ранее, в предыдущих главах, где обычно предполагалось, что оператор $\nabla_{\mathbf{v}}L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ *не вырожден*.

Распишем уравнение Эйлера подробнее:

$$F[\zeta] = \nabla_z F(\zeta, \zeta') - \frac{d}{d\tau}\nabla_w F(\zeta, \zeta') =$$
$$= \nabla_z F(\zeta, \zeta') - \nabla_w F_z(\zeta, \zeta')\zeta' - \nabla_w F_w(\zeta, \zeta')\zeta'' = 0$$

или

$$\nabla_w F_w(\zeta, \zeta')\zeta'' = \nabla_z F(\zeta, \zeta') - \nabla_w F_z(\zeta, \zeta')\zeta'.$$

В силу вырожденности оператора $\nabla_w F_w(z, w)$ это уравнение не может быть однозначно решено относительно ζ'': оно либо противоречиво, либо определяет ζ'' неоднозначно, причем выбор из этих возможностей зависит, вообще говоря, от точки (ζ, ζ'). Для того чтобы уравнение было разрешимо относительно ζ'', в силу самосопряженности $\nabla_w F_w$ необходимо и достаточно, чтобы его правая сторона была ортогональна всем собственным векторам оператора $\nabla_w F_w$, отвечающим нулевому собственному значению.

Предположим (и будем считать это предположение выполненным всегда при рассмотрении функционала J), что w — единственный (с точностью до множителя) собственный вектор оператора $\nabla_w F_w(z, w)$, отвечающий нулевому собственному значению.

Итак, следует выяснить, выполняется ли соотношение

$$(w, \nabla_z F(z, w) - \nabla_w F_z(z, w)w) = 0$$

или

$$(w, \nabla_z F(z, w)) = (\nabla_w F_z(z, w)w, w).$$

Продифференцируем уравнение, выражающее однородность F, по z:

$$\nabla_z F(z, w) = \nabla_z(w, \nabla_w F(z, w)) = \nabla_z(F_w(z, w)w) = \nabla_z F_w(z, w)w$$

и умножим результат скалярно на w:

$$(w, \nabla_z F(z, w)) = (w, \nabla_z F_w(z, w)w).$$

Так как операторы $\nabla_z F_w$ и $\nabla_w F_z$ взаимно сопряжены, полученное равенство в точности совпадает с условием разрешимости уравнения Эйлера относительно ζ'' при произвольных (ζ, ζ').

Прежде чем продолжать обсуждение уравнения Эйлера, отметим формулу

$$(F[\zeta](\tau), \zeta'(\tau)) = 0, \tag{8}$$

которая вытекает из предыдущих рассмотрений. Действительно, слагаемое в выражении $F[\zeta]$, не содержащее ζ'', как только что было установлено, ортогонально ζ'; слагаемое, содержащее ζ'', ортогонально ζ' очевидным образом:

$$(\zeta', \nabla_w F_w(\zeta, \zeta')\zeta'') = (\nabla_w F_w(\zeta, \zeta')\zeta', \zeta'') = 0.$$

Ограничим оператор $\nabla_w F_w(z, w)$ на подпространство, ортогональное вектору w, и обозначим это ограничение $B(z, w)$. Оператор $B(z, w)$ обратим и в терминах $B^{-1}(z, w)$ можно найти ζ'' из уравнения Эйлера:

$$\zeta'' = B^{-1}(\zeta, \zeta')[\nabla_z F(\zeta, \zeta') - \nabla_w F_z(\zeta, \zeta')\ \zeta'] + \sigma(\tau)\zeta'.$$

Здесь $\sigma: \Delta \to \mathbf{R}$ — *произвольная функция*, которую следует считать непрерывной, если $\zeta \in C^2$.

Пример 1. Если $F(z, w) = \|w\|$, то

$$F_{w_i w_j}(w) = \frac{\|w\|^2 \delta_{ij} - w_i w_j}{\|w\|^3}.$$

В этом случае w — единственный собственный вектор оператора $\nabla_w F_w$, отвечающий нулевому собственному значению. Действительно, всякий такой вектор h удовлетворяет уравнению

$$\nabla_w F_w(w)\, h = \frac{\|w\|^2 h - w(w, h)}{\|w\|^3} = 0,$$

откуда и следует $h = cw$, $c \in \mathbf{R}$. Уравнение Эйлера имеет в этом примере вид

$$\nabla_w F_w(\zeta)\, \zeta'' = \frac{\|\zeta'\|^2 \zeta'' - \zeta'(\zeta', \zeta'')}{\|\zeta'\|^3} = 0$$

и равносильно дифференциальному уравнению

$$\zeta''(\tau) = \sigma(\tau)\, \zeta'(\tau),$$

в котором σ — произвольная функция. Нетрудно убедиться, что общее решение этого уравнения таково:

$$\zeta = u w_0 + z_0,$$

где w_0, $z_0 \in \mathbf{R}^m$ и $u: \Delta \to \mathbf{R}$ произвольны с той оговоркой, что $u'(\tau) \neq 0$. При этом $u'' = \sigma u'$. Для того чтобы ζ было параметризованной кривой, следует потребовать также $w_0 \neq 0$. Полученный результат означает, что решения уравнения Эйлера — отрезки прямых в $\mathbf{R}^m$. Прямые в $\mathbf{R}^m$ нумеруются $2m - 2$ числовыми параметрами. Их можно однозначно выбрать, указав точку, через которую проходят прямая и одномерное касательное подпространство.

Аналитическая причина вырожденности уравнения Эйлера — однородность функции F; геометрическая причина, которую можно считать первопричиной, — *произвол в параметризации кривой*. Положение, с которым мы столкнулись, в том или ином виде возникает каждый раз, когда рассматриваются интегральные функционалы, аргументами которых являются геометрические объекты, но для описания которых используется параметризация этих объектов при помощи чисел. Каждый раз уравнение Эйлера эквивалентно дифференциальному уравнению, содержащему произвольные функции. В физике выбор конкретной параметризации

геометрического объекта часто называют *выбором калибровки*, а факт независимости функционала от выбора калибровки — *калибровочной инвариантностью*. Необходимо отметить, что неоднозначность выбора параметризации не всегда сводится к неоднозначности выбора параметров на кривой или поверхности (в конечномерном пространстве), для других геометрических объектов она может иметь существенно иную природу. К числу таких более сложных теорий, для которых характерна калибровочная инвариантность, относится, в частности, *электродинамика Максвелла*, рассмотренная выше в п. 50 как пример лагранжевой системы.

Пример 2. Пусть $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\| + c(\mathbf{x})$. Оператор $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ имеет единственный собственный вектор $\mathbf{v}$ с нулевым собственным значением. Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{f}'}{\|\mathbf{f}'\|} = \nabla_{\mathbf{x}} c(\mathbf{f})$$

непротиворечиво тогда и только тогда, когда $(\mathbf{f}', \nabla_{\mathbf{x}} c(\mathbf{f})) = \frac{d}{dt} c(\mathbf{f}) = 0$. В этом случае оно приводится к виду

$$\frac{\mathbf{f}''}{\|\mathbf{f}'\|} = \nabla_{\mathbf{x}} c(\mathbf{f}) + \sigma(t)\,\mathbf{f}',$$

где σ — произвольная функция. Полученное уравнение должно рассматриваться совместно с условием $(\mathbf{f}', \nabla_{\mathbf{x}} c(\mathbf{f})) = 0$, которое показывает, что точки $\mathbf{f}(t)$ должны лежать на некоторой поверхности M_{c_0}, определяемой в $\mathbf{R}^n$ уравнением $c(\mathbf{x}) = c_0$, c_0 — постоянная. Если какая-либо точка $\mathbf{f}(t_0)$ лежит на поверхности M_{c_0}, то выбором функции σ можно добиться того, что и все точки $\mathbf{f}(t)$ лежат на M_{c_0}. Мы видим, что характер вырождения уравнения Эйлера в этом примере сильно отличается от характера вырождения уравнения Эйлера в случае функционала на кривых

§ 74. Выбор параметризации. В последующих пунктах параграфа будет предполагаться в дополнение к прежним условиям на функцию F, что $F(z, w) \neq 0$ при $w \neq 0$. Если $m \geqslant 2$, из этого предположения следует, что функция $F(z, w)$ при $w \neq 0$ сохраняет знак. Условимся для определенности, что $F(z, w) > 0$.

Вырожденностью уравнения Эйлера можно воспользоваться, чтобы наложить подходящее условие на параметризацию. После этого уравнение Эйлера превращается в обычную систему m уравнений второго порядка.

Пусть $F_1: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ — любая функция, удовлетворяющая условиям, которые налагались выше на функцию F, в том числе условиям однородности и положительности: $F_1(z, w) > 0$ при $w \neq 0$. Всегда найдется параметризация ζ, удовлетворяющая условию

$$F_1(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)) = \mu,$$

μ — заданная положительная постоянная. Если ζ_0 — произвольная параметризация кривой γ, то параметризация ζ имеет вид $\zeta = \zeta_0 \circ \varkappa$, где $\varkappa$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F_1(\zeta_0(\varkappa(\tau)), \zeta_0'(\varkappa(\tau)))\,\varkappa'(\tau) = \pm\mu$$

(знак совпадает со знаком $\varkappa'$), имеющему первый интеграл

$$\int F_1(\zeta_0(\varkappa),\ \zeta_0'(\varkappa))\,d\varkappa \mp \mu\tau = c.$$

Отсюда функция $\varkappa$ определяется с некоторым произволом: $\varkappa(\tau) = \varkappa_0(\pm(\tau - a))$, где $\varkappa_0$ — какое-либо фиксированное решение уравнения, а число a и знак перед аргументом произвольны. Если требовать лишь постоянства $F_1(\zeta,\ \zeta')$, не фиксируя значение μ, то функция $\varkappa$ определяется с бóльшим произволом: $\varkappa(\tau) = \varkappa_0(\lambda(\tau - a))$, где λ и a произвольны, $\lambda \neq 0$.

Соотношение $F_1(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau)) = \mu$, в котором μ не фиксировано, эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\tau} F_1(\zeta,\ \zeta') = (\nabla_z F_1(\zeta,\ \zeta'),\ \zeta') + (\nabla_w F_1(\zeta,\ \zeta'),\ \zeta'') = 0.$$

Система

$$F[\zeta] = 0, \quad \frac{d}{d\tau} F_1(\zeta,\ \zeta') = 0$$

может быть однозначно решена относительно ζ'': $\zeta'' = \Phi(\zeta,\ \zeta')$ *и, таким образом, представляет собой систему m дифференциальных уравнений второго порядка относительно* ζ. Чтобы убедиться в этом, запишем ее явно:

$$\begin{pmatrix} \nabla_w F_w(\zeta,\ \zeta')\,\zeta'' + \nabla_w F_z(\zeta,\ \zeta')\,\zeta' - \nabla_z F(\zeta,\ \zeta') \\ (\nabla_w F_1(\zeta,\ \zeta'),\ \zeta'') + (\nabla_z F_1(\zeta,\ \zeta'),\ \zeta') \end{pmatrix} = \\ = A(\zeta,\ \zeta')\,\zeta'' - a(\zeta,\ \zeta') = 0.$$

Здесь

$$A(z,\ w)\,h = \begin{pmatrix} \nabla_w F_w(z,\ w)\,h \\ (\nabla_w F_1(z,\ w),\ h) \end{pmatrix},$$

$A(z,\ w)$ — оператор $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m+1}$;

$$a(z,\ w) = \begin{pmatrix} \nabla_z F(z,\ w) - \nabla_w F_z(z,\ w)\,w \\ -(\nabla_z F_1(z,\ w),\ w) \end{pmatrix},$$

$a(z,\ w)$ — вектор из $\mathbf{R}^{m+1}$. Ясно, что вторая координата вектора $A(z,\ w)\,h$ произвольна, поэтому множество значений оператора $A(z,\ w)$ есть m-мерное подпространство в $\mathbf{R}^{m+1}$. Следовательно, отображение $A(z,\ w)$ обратимо; обозначим обратный оператор $A^{-1}(z,\ w)$. Вектор $a(z,\ w)$ принадлежит множеству значений оператора $A(z,\ w)$. Поэтому *система эквивалентна уравнению*

$$\zeta''(t) = \Phi(\zeta(t),\ \zeta'(t)),$$

в котором $\Phi(z,\ w) = A^{-1}(z,\ w)\,a(z,\ w)$.

Если в этих построениях $F = F_1$, то система оказывается эквивалентной уравнению Эйлера для некоторого простого интегрального функционала. Присоединим к уравнению $F[\zeta] = 0$ условие $F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau)) = \mu$. Если учесть, что при постоянной $F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))$

$$(F^2)[\zeta] = 2F(\zeta,\ \zeta')\,F[\zeta],$$

то станет очевидным, что всякая экстремаль допускает параметризацию ζ, которая удовлетворяет уравнению

$$(F^2)[\zeta]=0.$$

Обратно, пусть $(F^2)[\zeta]=0$. Согласно п. 9 это уравнение имеет следующий первый интеграл: $F^2-2F(w, \nabla_w F)$. В силу однородности $(w, \nabla_w F)=F$, поэтому первым интегралом будет функция $F^2-2F^2=-F^2$, и следовательно, функция F. Отсюда вытекает, что решения уравнения $(F^2)[\zeta]=0$ являются и решениями уравнения $F[\zeta]=0$.

Отметим еще, что всякое постоянное отображение ζ, очевидно, является решением уравнения $(F^2)[\zeta]=0$. Оно характеризуется условием $F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))=0$.

Итак, доказана

Теорема. *Множество всех решений уравнений $(F^2)[\zeta]=0$ совпадает с множеством таких решений уравнения $F[\zeta]=0$, на которых функция $F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))$ постоянна.*

Иначе: *множество всех решений уравнения $(F^2)[\zeta]=0$ совпадает с множеством решений системы: $F[\zeta]=0$, $\frac{d}{d\tau}F(\zeta, \zeta')=0$.*

Иначе: *множество всех экстремалей функционала*

$$\int_\Delta F^2(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))\,d\tau$$

совпадает с множеством экстремалей функционала

$$\int_\Delta F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))\,d\tau,$$

на которых функция $F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))$ постоянна.

За исключением тривиального (постоянного) решения уравнения $(F^2)[\zeta]=0$ являются параметризациями экстремалей функционала и притом всех. Это, конечно, не произвольные параметризации. Параметризации, эквивалентные какой-либо параметризации ζ и удовлетворяющие уравнению $(F^2)[\zeta]=0$, имеют вид $\zeta_{\lambda a}(\tau)=\zeta(\lambda(\tau-a))$, где $\lambda, a\in\mathbf{R}$ $\lambda\neq 0$. Множество решений уравнения $(F^2)[\zeta]=0$ нумеруется, например, данными Коши

$$\zeta(0)=z_0, \quad \zeta'(0)=w_0.$$

Условие $w_0\neq 0$ выделяет из множества решений параметризованные кривые. Сопоставляя сказанное, можно утверждать, что множество экстремалей функционала является $2m-2$ параметрическим множеством кривых в $\mathbf{R}^m$.

Существует экстремаль, проходящая через заданную точку и имеющая в ней заданное касательное подпространство. Она выделяется этими условиями однозначно. Параметризацией ζ искомой экстремали является решение указанной выше задачи Коши, где z_0 — заданная точка, а w_0, $w_0\neq 0$, — какой-либо касательный вектор. Пусть ζ_1 — произвольная, удовлетворяющая уравнению $(F^2)[\zeta]=0$, параметризация экстремали, проходящей через точку z_0

и имеющей в ней заданное касательное подпространство. Тогда при некоторых a и λ, $\lambda \neq 0$,

$$\zeta_1(a) = z_0, \quad \zeta_1'(a) = \lambda w_0.$$

В силу теоремы единственности для задачи Коши $\zeta_1 = \zeta_{\lambda, a}$. Но ζ и $\zeta_{\lambda, a}$ являются параметризациями одной и той же экстремали.

Пример. Если $F(z, w) = (A(z)\, w, w)^{1/2}$, то

$$((F^2)[\zeta])_l = \sum_{k,\, l=1}^{m} \frac{\partial A_{kl}(\zeta)}{\partial z_l} \zeta_k' \zeta_l' -$$

$$- 2\sum_{k,\, l=1}^{m} \frac{\partial A_{il}(\zeta)}{\partial z_k} \zeta_l' \zeta_k' - 2\sum_{l=1}^{m} A_{il}(\zeta)\, \zeta_l''.$$

Уравнение $(F^2)[\zeta] = 0$ можно решить относительно ζ'':

$$\zeta_i'' = \sum_{k,\, l=1}^{m} \Gamma_i^{kl}(\zeta)\, \zeta_k' \zeta_l',$$

где

$$\Gamma_i^{kl} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} (A^{-1})_{ij} \left(\frac{\partial A_{kl}}{\partial z_j} - \frac{\partial A_{jl}}{\partial z_k} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial z_l} \right).$$

Условие $(A(\zeta)\,\zeta', \zeta') = \mu^2$, если рассматривать соответствующий функционал как длину кривой на параметризованной поверхности, означает, что параметр пропорционален длине кривой.

Замечание. У нас встретились два условия на параметризацию: $\|\zeta'\| = \mu$ и $F(\zeta, \zeta') = \mu$. Первое из них было использовано для того, чтобы ввести в множестве кривых структуру метрического пространства, второе позволило перейти от вырожденной системы к обычной. Не входя в подробности, отметим, что любое условие вида $F_1(\zeta, \zeta') = \mu$ может быть использовано для обеих целей с равным, в принципе, успехом. Параметризация, удовлетворяющая такому условию, может быть использована для погружения множества ориентированных кривых в множество вектор-функций $[0, 1] \to \mathbf{R}^m$ и тем самым для превращения множества кривых в метрическое пространство. Множество вектор-функций будет при этом зависеть от вида F_1, будет зависеть от F_1 и расстояние между кривыми, порожденное той или иной нормой на множестве вектор-функций, однако различные способы введения такого расстояния эквивалентны на множестве кривых, длины которых ограничены наперед заданным числом. Кроме того, присоединение условия $F_1(\zeta, \zeta') = \mu$ к уравнению $F[\zeta] = 0$ приводит, как и в частном случае $F_1 = F$, к невырожденной системе.

75. Трансверсальность. Пусть путь γ_α является вариацией экстремали γ, тогда

$$\varphi'(0) = (\nabla_w F(\zeta(b), \zeta'(b)), \frac{d}{d\alpha} \zeta(b(\alpha), \alpha)) \Big|_{\alpha=0} -$$

$$- (\nabla_w F(\zeta(a), \zeta'(a)), \frac{d}{d\alpha} \zeta(a(\alpha), \alpha)) \Big|_{\alpha=0}.$$

Рассмотрим вклад в производную $\varphi'(0)$ одной из граничных точек кривой γ, например ее начала:

$$\varphi'_a(0) = \left(\nabla_w F(\zeta(a), \zeta'(a)), \frac{d}{d\alpha}\zeta(a(\alpha), \alpha)\right)\Big|_{\alpha=0}.$$

Для выполнения равенства $\varphi'_a(0) = 0$ необходимо и достаточно, чтобы скорость $\frac{d}{d\alpha}\zeta(a(\alpha), \alpha)\Big|_{\alpha=0}$ начальной точки $\zeta(a(\alpha), \alpha)$ кривой γ_α при изменении α в точке $\alpha = 0$ была *ортогональна* вектору $\nabla_w F(\zeta(a), \zeta'(a))$. Аналогичное предложение имеет место по отношению к концу экстремали γ.

Отображение $(z, w) \to \nabla_w F(z, w)$ обладает следующим свойством однородности:

$$\nabla_w F(z, \lambda w) = \nabla_w F(z, w) \quad \text{при} \quad \lambda > 0.$$

Таким образом, вектор $\nabla_w F(z, w)$ вполне определяется точкой z и направлением вектора w. Это значит, что вектор $\nabla_w F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))$, где ζ — параметризованная кривая, не зависит от параметризации, а определяется лишь точкой кривой и направлением касательной в ней. Так как вектор $\nabla_w F(z, w) \neq 0$ при $w \neq 0$, то множество ортогональных к нему векторов образует $(m-1)$-мерное подпространство в $\mathbf{R}^m$. Это подпространство, если z — точка экстремали γ, а w — касательный вектор к ней в z, называется *трансверсальным к экстремали* γ *в точке* z.

Пусть M — гиперповерхность в $\mathbf{R}^m$. *Если экстремаль* γ *пересекает* M *и касательное подпространство к* M *в точке пересечения является трансверсальным к экстремали, то говорят, что экстремаль* γ *пересекает гиперповерхность* M *трансверсально.* Иначе говоря, *экстремаль* γ *пересекает гиперповерхность* M *трансверсально, если в точке пересечения* z *вектор* $\nabla_w F(z, w)$, w — *вектор касательной к* γ, *является вектором нормали к* M. Пусть гиперповерхность M задана уравнением $G(z) = 0$, где $G: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$. Тогда предыдущее условие выражается равенством

$$\nabla_w F(z, w) = \lambda \nabla G(z) \quad \text{или} \quad F_w(z, w) = \lambda G'(z),$$

где λ — какое-либо число.

Пример. Пусть $F(z, w) = (A(z)w, w)^{1/2}$, тогда

$$\nabla_w F(z, w) = \frac{A(z)w}{(A(z)w, w)^{1/2}}.$$

Множество векторов x, ортогональных к $\nabla_w F(z, w)$, характеризуется соотношением $(A(z)w, x) = 0$. Если $A = l^2 I$, то это соотношение превращается в условие *ортогональности* $(w, x) = 0$. В этом случае подпространство, трансверсальное к экстремали в точке z, ортогонально к экстремали в этой точке, т. е. ортогонально к вектору касательной в этой точке. Условие трансверсального пересечения имеет соответственно вид

$$A(z)w = \lambda \nabla G(z) \quad \text{и} \quad w = \lambda \nabla G(z).$$

t-параметризация. Если кривая γ — график, то уравнение Эйлера $F[\zeta]=0$ для нее сводится к уравнению $\mathbf{F}[\zeta]=0$. Действительно, соотношение

$$(F[\zeta], \zeta') = F_0[\zeta]\,\zeta_0' + (\mathbf{F}[\zeta], \boldsymbol{\zeta}') = 0$$

благодаря условию $\zeta_0' \neq 0$ означает, что, $F_0[\zeta]=0$, если $\mathbf{F}[\zeta]=0$. Если на γ введена t-параметризация, то

$$\mathbf{F}[\zeta] = L[\mathbf{f}],$$

поэтому уравнение $\mathbf{F}[\zeta]=0$ равносильно уравнению $L[\mathbf{f}]=0$.

Пусть экстремаль γ в окрестности точки $z=(t, \mathbf{x})$ пересечения с простой гиперповерхностью M является графиком. Тогда γ пересекает M трансверсально, если вектор $\left(-\hat{H}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'), \hat{p}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\right)$ является вектором нормали к M в точке пересечения.

Экстремальные задачи. Интегральный функционал $\gamma \to d(\gamma)$, $d(\gamma)$ — длина кривой, рассматриваемый на всем пространстве $C^1(\Gamma_m)$, не имеет точек экстремума: сколь угодно малая окрестность любой кривой γ содержит отрезок — кривую, длина которой меньше, чем длина γ, и сама может рассматриваться как отрезок лежащей в этой же окрестности кривой, длина которой больше, чем длина γ. Это рассуждение легко переносится на произвольный интегральный функционал J на $C^1(\Gamma_m)$, который также не имеет на пространстве $C^1(\Gamma_m)$ ни одной точки экстремума. *Содержательные экстремальные задачи в пространстве $C^1(\Gamma_m)$ — задачи на условный экстремум.* Простейшие условия — это условия на граничные точки: обычно предполагается, что начала кривых лежат на некотором заданном множестве M_1 в $\mathbf{R}^m$, а концы — на другом множестве M_2. Множества M_1 и M_2 могут быть произвольными множествами в $\mathbf{R}^m$, но в приложениях к физике и геометрии M_1 и M_2 обычно либо сводятся к точкам x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$, либо являются k-поверхностями, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, чаще всего гиперповерхностями. Если функционал — длина кривой, то задача состоит в отыскании таких пар точек x_1 и x_2, $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, расстояния между которыми минимальны; легко представить себе и такие случаи, когда возникают относительные минимумы.

Во всех случаях, когда дополнительные условия состоят в том, что граничные точки должны располагаться на заданных множествах, точки экстремума функционала обязательно являются экстремалями.

Действительно, если γ — точка условного экстремума функционала J, а γ_α — ее вариация с неподвижными концами, то функция $\varphi(\alpha) = J(\gamma_\alpha)$ также имеет в нуле точку экстремума. Поэтому $\varphi'(0)=0$, и ввиду произвольности вариации кривая γ удовлетворяет уравнению Эйлера. Равенство $\varphi'(0)=0$ должно выполняться не только для вариации с неподвижными концами, что приводит к некоторым необходимым условиям в граничных точках кривой γ, к граничным условиям для уравнения Эйлера. Ясно при этом,

что *условия в начале и в конце кривой γ не зависят друг от друга.* Если множество M_1 сводится к точке x_1, то граничное условие на M_1 в том и состоит, что начало кривой — точка x_1. Если оба множества M_1 и M_2 сводятся к точкам x_1 и x_2, то экстремум функционалу J может сообщать лишь экстремаль, начало которой x_1, а конец x_2. Рассматривая экстремали, проходящие через x_1, подбором касательного подпространства в этой точке можно в типичном случае найти единственную экстремаль, конец которой — точка x_2. Для функционала $\gamma \to d(\gamma)$ эта экстремаль есть отрезок прямой между точками x_1 и x_2.

Найдем вид граничных условий для случая, когда M_1 — простая гиперповерхность. Пусть $\alpha \to u(\alpha) \in M_1 \subset \mathbf{R}^m$ — гладкий путь на M_1, причем $u(0) = x_1$ — начало экстремали γ, точки экстремума функционалу J. Пусть $\zeta : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ — параметризация γ. Введем гладкую функцию $\theta : [a, b] \to \mathbf{R}$, равную 1 вблизи a и 0 вблизи b. Рассмотрим вариацию $\alpha \to \gamma_\alpha$ кривой γ, заданную при достаточно малых α параметризацией

$$\tau \to \zeta(\tau) + \theta(\tau)[u(\alpha) - x_1]$$

на интервале Δ. Так как γ — экстремаль, то

$$\varphi'(0) = -(\nabla_w F(x_1, \zeta'(a)), u'(0)).$$

Точка 0 — точка экстремума функции φ, поэтому $\varphi'(0) = 0$. Ввиду произвольности u вектор $u'(0)$ — произвольный касательный к M_1 в точке x_1 вектор. Следовательно, экстремаль γ пересекает гиперповерхность M_1 трансверсально.

Итак, *если граничная точка кривой в задаче на условный экстремум должна находиться на гиперповерхности, то точка экстремума, экстремаль функционала, в этой граничной точке должна пересекать гиперповерхность трансверсально.*

Легко сообразить, что в типичном случае это условие, поставленное в обеих граничных точках или рассматриваемое совместно с условием, фиксирующим другую граничную точку, выделяет экстремаль однозначно.

§ 76. Связь с задачей Лагранжа. В предыдущем разделе отмечалось, что задача об отыскании точек экстремума функционала J в пространстве кривых может рассматриваться как задача Лагранжа для функционала $\hat{J}$ в пространстве вектор-функций $[0, 1] \to \mathbf{R}^m$ при дополнительной связи $G = 0$, где отображение G дается формулой

$$G(\zeta)(\tau) = \|\zeta'(\tau)\| - \|\zeta'(0)\|. \qquad (9)$$

К этой связи следует, конечно, присоединить условия для граничных точек $\zeta(0)$ и $\zeta(1)$. Подобное положение сохраняется и при замене отображения (9) более общим отображением G:

$$G(\zeta)(\tau) = F_1(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)) - F_1(\zeta(0), \zeta'(0)). \qquad (9')$$

Такая связь не влияет на уравнение Эйлера $F[\zeta]=0$ и проявляется лишь в том, что среди множества его решений следует выделить решение с нужной параметризацией. Мы не рассматриваем связь вида $\|\zeta'(\tau)\|=\mu$ или $F_1(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))=\mu$, μ фиксировано, так как при заданном интервале параметризации такая связь не сводится лишь к выбору параметризации. В частности, связь $\|\zeta'(\tau)\|=\mu$ на интервале $[0, 1]$ означает, что задана длина кривой: $d(\gamma)=\mu$. Наложение подобной связи влияет на вид уравнения.

Кратко поясним высказанные положения. Построения, которые были использованы при рассмотрении задачи Лагранжа в § 2 гл. II, показывают, что точка экстремума ζ функционала $\hat{J}$, удовлетворяющая условию (9) и каким-либо обычным условиям на граничные точки, аннулирует при $h \in C_0^1([0, 1] \to \mathbf{R}^m)$ вариацию $\delta I_\Lambda(\zeta; h)$ функционала вида

$$I_\Lambda(\zeta)=\int_\Delta \{F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))+\lambda(\tau)[F_1(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))-F_1(\zeta(0), \zeta'(0))]\}\, d\tau = \\ =\int_\Delta F_\lambda(\tau, \zeta(\tau), \zeta'(\tau))\, d\tau - F_1(\zeta(0), \zeta'(0)) \int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau.$$

Здесь λ — некоторая функция $\Delta \to \mathbf{R}$ класса C^1, а $F_\lambda(\tau, z, w)=F(z, w)+\lambda(\tau)F_1(z, w)$. Хотя функционал J_Λ не является, строго говоря, интегральным, найти его вариацию не составляет труда: при $\zeta \in C^2$ и $h \in C_0^1$

$$\delta J_\Lambda(\zeta; h)=\int_\Delta (F_\lambda[\zeta](\tau), h(\tau))\, d\tau + (\nabla_w F_\lambda(\zeta, \zeta'), h)|_\Delta - \\ -[(\nabla_z F_1(\zeta(0), \zeta'(0)), h(0))+(\nabla_w F_1(\zeta(0), \zeta'(0)), h'(0))] \int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau = \\ =\int_\Delta (F_\lambda[\zeta](\tau), h(\tau))\, d\tau - (\nabla_w F_1(\zeta(0), \zeta'(0)), h'(0)) \int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau.$$

Если функция h финитна, то равенство $\delta J_\Lambda(\zeta; h)=0$ равносильно уравнению Эйлера $F_\lambda[\zeta]=0$. С учетом уравнения Эйлера

$$\delta J_\Lambda(\zeta; h)=-(\nabla_w F_1(\zeta(0), \zeta'(0)), h'(0)) \int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau = 0.$$

Полагая $h'(0)=\zeta'(0)$, получаем

$$(\nabla_w F_1(\zeta(0), \zeta'(0)), h'(0)) \int_\Delta \lambda(t)\, d\tau = F_1(\zeta(0), \zeta'(0)) \int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau = 0,$$

откуда следует $\int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau=0$. Перепишем уравнение Эйлера подробнее:

$$F_\lambda[\zeta]=F[\zeta]+\lambda F_1[\zeta]-\lambda' \nabla_w F_1(\zeta, \zeta')=0.$$

При каждом τ умножим это соотношение скалярно на $\zeta'(\tau)$. В силу (8) получим

$$-\lambda'(\zeta', \nabla_w F_1(\zeta, \zeta'))=-\lambda' F_1(\zeta, \zeta')=0,$$

так что $\lambda'=0$. Вместе с условием $\int_\Delta \lambda(\tau)\, d\tau=0$ это означает, что $\lambda=0$. Поэтому

$$J_\Lambda(\zeta)=\int_\Delta F(\zeta, \zeta')\, d\tau.$$

Тем самым, наложение связи (9), действительно, не влияет ни на вид уравнения Эйлера, ни на вид граничных условий.

Возможность погружения экстремальных задач для функционала J в рамки задачи Лагранжа для функционала $\hat{J}$ ценна тем, что она автоматически дает аппарат для экстремальных задач на множестве кривых при наложении дополнительных связей, напри-

мер связи $\Phi(\zeta(\tau))=0$, где Φ — заданная функция на $\mathbf{R}^m$. Геометрически речь идет о кривых, лежащих на множестве M, точки которого определяются уравнением $\Phi(z)=0$. Будем предполагать, что отображение $\Phi'(z)$ всюду невырождено, так что Φ — параметризованная гиперповерхность. Полностью задача ставится так: *найти точки экстремума функционала J в пространстве $C^1(\Gamma_m)$, ограниченного на множество кривых, точки которых лежат на M, а граничные точки, например, фиксированы (также на M)*. Поставленная задача эквивалентна задаче отыскания точек экстремума функционала $\hat{J}$ на пространстве $C^1([0,1]\to\mathbf{R}^m)$, ограниченного на множество отображений ζ, удовлетворяющих условиям

$$\zeta(0)=x_1,\quad \zeta(1)=x_2,\quad \Phi\circ\zeta=0,$$
$$\|\zeta'(\tau)\|-\|\zeta'(0)\|=0,\quad \tau\in[0,1].$$

Последнее условие, ограничивающее лишь параметризацию, по-прежнему не повлияет на уравнение Эйлера, которое будет, таким образом, иметь вид

$$F[\zeta]+\lambda\Phi'\circ\zeta=0, \tag{10}$$

где $\lambda\in C[0,1]$.

Пример 1. Пусть $F(z,\ w)=\|w\|$, тогда уравнение (10) имеет вид

$$\zeta''-\zeta'(\zeta'',\ \zeta')+\lambda\|\zeta'\|^3\nabla\Phi(\zeta)=0.$$

Из уравнения связи $\|\zeta'\|=\mu$ или $(\zeta',\ \zeta')=\mu^2$ следует $(\zeta'',\ \zeta')=0$, поэтому $\zeta''=\lambda_1\nabla\Phi(\zeta)$, где $\lambda_2=-\mu^3\lambda$. Из дифференциальной геометрии известно, что вектор ζ'' направлен по нормали к кривой γ. Поэтому уравнение $\zeta''=\lambda\nabla\Phi(\zeta)$ имеет простой геометрический смысл: оно утверждает, что нормаль к кривой λ является нормалью к гиперповерхности M.

В таком же плане могут быть рассмотрены и *изопериметрические задачи*.

Пример 2. *Классическая изопериметрическая задача*: найти простую замкнутую кривую на плоскости, имеющую заданную длину и ограничивающую максимальную площадь.

Будем рассматривать лишь кривые класса C^1. *Кривая называется замкнутой, если ее параметризация $\zeta:[a,\ b]\to\mathbf{R}^m$ обладает следующими свойствами*: $\zeta(a)=\zeta(b)$, $\zeta'(a)=\zeta'(b)$ (если какая-нибудь параметризация обладает этими свойствами, ими обладает и произвольная). Для замкнутой кривой определение простоты нуждается в видоизменении: замкнутая кривая называется простой, если ее параметризация обладает свойством $\zeta(\tau_1)\neq\zeta(\tau_2)$ при $\tau_1\neq\tau_2$, $\tau_1,\ \tau_2\in\in[a,\ b)$.

Площадь, ограниченная простой замкнутой кривой γ на плоскости $\mathbf{R}^2$, равна абсолютной величине интеграла

$$J(\gamma)=1/2\int_\Delta(\zeta_2\zeta_1'-\zeta_2'\zeta_1)\,d\tau.$$

Задача, таким образом, сводится к отысканию точек экстремума функционала J в пространстве $C^1(\Gamma_2)$ при условиях:

1) $G(\gamma)=\int_\gamma ds=l$, $l>0$ задано,

2) $\zeta(a)=\zeta(b)$, 3) $\zeta'(a)=\zeta'(b)$, 4) кривая γ проста. Решение γ задачи должно аннулировать $\varphi'(0)$, где $\varphi(\alpha)=(J+\lambda G)(\gamma_\alpha)$, а λ — некоторое число и γ_α — удовлетворяющая условиям 2) — 4) вариация γ. Отсюда очевидно, что

γ — экстремаль функционала $J+\lambda G$. Уравнение Эйлера для функционала $J+\lambda G$ имеет вид

$$-\zeta_2'-\lambda\frac{\zeta_1''\|\zeta'\|^2-\zeta_1'(\zeta',\zeta'')}{\|\zeta'\|^3}=0,\quad \zeta_1'-\lambda\frac{\zeta_2''\|\zeta'\|^2-\zeta_2'(\zeta',\zeta'')}{\|\zeta'\|^3}=0.$$

Ясно, что $\lambda\neq 0$, иначе γ — отрезок прямой.

Наложим условие $\|\zeta'\|=\mu$ на параметризацию. Тогда $(\zeta',\zeta'')=0$ и, следовательно, уравнение Эйлера принимает вид

$$\lambda\zeta_1''=-\|\zeta'\|\zeta_2',\quad \lambda\zeta_2''=\|\zeta'\|\zeta_1'.$$

Условие $\|\zeta'\|=\mu$ означает, что существует такая гладкая функция $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}$, что

$$\zeta_1'=-\mu\sin\varphi,\quad \zeta_2'=\mu\cos\varphi.$$

Уравнение Эйлера дает $\varphi'=\mu\lambda^{-1}$. Отсюда

$$\zeta_1(\tau)=\lambda\cos\mu\lambda^{-1}\tau+\alpha,\quad \zeta_2(\tau)=\lambda\sin\mu\lambda^{-1}\tau+\beta,$$

α и β произвольны. Таким образом, γ обязательно является дугой окружности радиуса $|\lambda|$, точка (α,β) — ее центр. Условие 2) означает, что $b-a=2\pi n\mu\lambda^{-1}$, n — целое, при этом условие 3) выполнено автоматически. Условие 4) приводит к $|n|=1$, так что γ — окружность. Условие 1), наконец, дает $2\pi\mu=l$.

Итак, *решение задачи может быть лишь окружностью* радиуса $(2\pi)^{-1}l$. Центр окружности может быть произвольной точкой плоскости. Читатель, конечно, знаком с элементарными рассуждениями, использующими специфику задачи, которые показывают, что подобная окружность — действительно решение задачи. Эти рассуждения при желании нетрудно перевести на язык, которым мы здесь пользуемся.

77. Примеры.

1) Геодезические. Экстремали функционала

$$J(\gamma)=\int_\Delta (A(\zeta)\zeta',\zeta')^{1/2}\,d\tau \tag{11}$$

называют *геодезическими*. Позднее мы убедимся, что геодезические достаточно малой длины сообщают абсолютный минимум функционалу J на множестве всех кривых с заданными граничными точками. Напомним, что $J(\gamma)$ можно рассматривать как длину кривой γ на параметризованной поверхности в пространстве $\mathbf{R}^N$. Таким образом, *достаточно короткие отрезки геодезических являются кратчайшими кривыми на такой поверхности*. Геодезические, параметризованные пропорционально длине кривой на поверхности так, что $(A(\zeta)\zeta',\zeta')=\mu^2$, удовлетворяют уравнению $(F^2)[\zeta]=0$ или (см. п. 74)

$$\zeta_i''=\sum_{k,l=1}^m\Gamma_i^{kl}(\zeta)\zeta_k'\zeta_l'.$$

В предыдущем пункте было показано, что геодезические на гиперповерхности в $\mathbf{R}^m$ характеризуются тем, что вектор нормали в каждой точке геодезической параллелен нормали к поверхности.

2) Принцип Ферма. Функционал (11) дает также время, нужное свету, чтобы пробежать вдоль кривой γ в среде, в которой скорость распространения света c в точке z дается формулой

$$c(z)=c_0l^{-1}(z),\quad A(z)=c_0^{-2}l^2(z).$$

Относящийся к геометрической оптике *принцип Ферма утверждает, что из точки источника x_1 в точку наблюдения x_2 свет распространяется вдоль экстремали γ функционала J*. Иначе говоря, лучи суть экстремали функционала J. Более специальный вариант принципа Ферма, верный для достаточно коротких лучей, утверждает, что *свет распространяется из точки x_1 в точку x_2 за кратчайшее время.*

3) П р и н ц и п Я к о б и. Рассмотрим на $\mathbf{R}^m$ натуральную механическую систему с функцией Лагранжа $L: L(t, x, v) = T(x, v) - V(x)$, $T(x, v) = \frac{1}{2}\langle A(x)v, v\rangle$. Согласно принципу Гамильтона, система движется по экстремалям функционала действия

$$S_\Delta(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt.$$

Пусть $E \subset \mathbf{R}$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^m$ множество D_E точек z, удовлетворяющих условию $E > U(z)$. Зададим на $D_E \times \mathbf{R}^m$ функцию

$$(z, w) \to F_E(z, w) = 2\sqrt{E - U(z)}\sqrt{T(z, w)}.$$

Она обладает всеми свойствами подынтегральной функции в интегральном функционале на кривых в $\mathbf{R}^m$. Поэтому на кривых, множество точек которых лежит в D_E, определен функционал

$$S_E(\gamma) = \int_\Delta F_E(\zeta, \zeta')\, d\tau,$$

где ζ — произвольная параметризация кривой γ.

Принцип Якоби утверждает, что кривые, по которым движется рассматриваемая механическая система, — это экстремали функционала S_E.

Более точно: *экстремаль функционала* S_E *допускает такую параметризацию* $\mathbf{f}$, *которая является экстремалью функционала* S_Δ, *при этом*

$$T(\mathbf{f}, \mathbf{f}') + U(\mathbf{f}) = E; \tag{12}$$

обратно: всякая экстремаль $\mathbf{f}$ *функционала* S_Δ *является параметризацией экстремали* γ *функционала* S_E, *где* E *дается соотношением* (12).

Поясним, что $T + U$ — интеграл уравнения Эйлера для функционала S, так что на экстремали $\mathbf{f}$ функционала S_Δ функция $T(\mathbf{f}, \mathbf{f}') + U(\mathbf{f})$ постоянна. Соотношение (12) как раз и является тем условием на параметризацию, которая позволяет установить связь между экстремалями функционалов S_Δ и S_E. Это условие можно записать так, что оно примет более стандартный характер. Введем с этой целью на $D \times \mathbf{R}^m$ функцию

$$(z, w) \to F_{1E}(z, w) = \sqrt{\frac{T(z, w)}{E - U(z)}}.$$

Она, как и F_E, обладает всеми свойствами подынтегральной функции в интегральном функционале на кривых. Соотношение (12) можно записать как следующее условие на параметризацию $F_{1E}(\zeta, \zeta') = 1$.

Значение принципа Якоби состоит в том, что он позволяет определять кривые, по которым происходит движение, т. е. позволяет определять движение с точностью до параметризации. Следует отметить, что функционал S_Δ имеет такой же вид, как и функционалы, с которыми мы имели дело в двух предыдущих примерах:

$$(A_1(z)w, w)^{1/2}, \quad \text{где} \quad A_1(z) = 2\sqrt{E - U(z)}\, A(z).$$

Таким образом, *вариационные принципы устанавливают математическую эквивалентность задач очень разной природы, физической и геометрической.* Один и тот же аппарат описывает геодезические, лучи света и кривые, по которым движутся механические системы в конфигурационном пространстве.

Д о к а ж е м принцип Якоби. Экстремали функционала S_E удовлетворяют уравнению

$$[T_z(\zeta, \zeta') - U'(\zeta)]\, F_{1E}^{-1}(\zeta, \zeta') - \frac{d}{d\tau} F_{1E}^{-1}(\zeta, \zeta')\, T_w(\zeta, \zeta') = 0.$$

Если $\mathfrak{f}$ — параметризация, удовлетворяющая условию (12), то отсюда следует уравнение Эйлера $L[\mathfrak{f}]=0$. Так как всякое решение уравнения $L[\mathfrak{f}]=0$ удовлетворяет условию (12), это рассуждение допускает обращение.

В. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ФОРМЫ ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ

78. Инвариантность уравнения Эйлера. Рассмотрим вопрос о *замене переменных* в уравнении $F[\zeta]=0$. Пусть задано гладкое отображение $T:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^m$, производная которого всюду невырождена. Подобные отображения будут называться в дальнейшем *преобразованиями* пространства $\mathbf{R}^m$. Параметризованной кривой $\zeta:\Delta\to\mathbf{R}^m$ сопоставим параметризованную кривую $\zeta^T=T\circ\zeta:\Delta\to\mathbf{R}^m$. Если ζ и ζ_1 — эквивалентные параметризованные кривые $\zeta_1=\zeta\circ\varkappa$, то и ζ^T, $(\zeta_1)^T$ — также эквивалентные параметризованные кривые. Поэтому преобразование T сопоставляют каждой кривой γ новую кривую γ^T: если γ параметризована отображением ζ, то γ^T параметризована отображением ζ^T.

Примеры. 1) Пусть $T(z)=z+z_0$, $z_0\in\mathbf{R}^m$ — фиксированный вектор. Тогда $\zeta^T(\tau)=\zeta(\tau)+z_0$. Множество точек кривой γ^T получается из множества точек кривой γ «сдвигом» на вектор z_0.

2) Пусть A — обратимый оператор в $\mathbf{R}^m$ и $T(z)=Az$. Тогда $\zeta^T(\tau)=A\zeta(\tau)$. Множество точек кривой γ^T получается из множества точек кривой γ применением к последним оператора A.

Пусть J — интегральный функционал на множестве кривых в $\mathbf{R}^m$. Рассмотрим функционал J^T:

$$J^T(\gamma)=J(\gamma^T),$$

или подробнее

$$J^T(\gamma)=\int_\Delta F(\zeta^T(\tau),\ \zeta^{T\prime}(\tau))\,d\tau=\int_\Delta F^T(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau,$$

где

$$F^T(z,\ w)=F(T(z),\ T'(z)\,w).$$

Пути γ_α во множестве кривых отвечает путь $(\gamma_\alpha)^T=\gamma_\alpha^T$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(\alpha)=J\left(\gamma_\alpha^T\right).$$

Для нее справедливо и другое представление

$$\varphi(\alpha)=J^T(\gamma_\alpha). \tag{13}$$

Предположим, что γ_α — вариация кривой γ с неподвижными граничными точками. Тогда γ_α^T — вариация кривой γ^T с неподвижными граничными точками. Воспользуемся формулой (6) для производной функции φ:

$$\varphi'(0)=\int_\Delta (F[\zeta^T](\tau),\ \zeta_\alpha^T(\tau,\ \alpha))\Big|_{\alpha=0}\,d\tau, \tag{14}$$

здесь $\zeta^T(\cdot,\ \alpha)$ — параметризация γ_α^T. Представление (13) дает для $\varphi'(0)$ другое выражение:

$$\varphi'(0)=\int_\Delta (F^T[\zeta](\tau),\ \zeta_\alpha(\tau,\ \alpha))\Big|_{\alpha=0} d\tau, \tag{15}$$

здесь $\zeta(\cdot,\ \alpha)$ — параметризация γ_α. Формула

$$\zeta_\alpha^T(\tau,\ \alpha)=T'(\zeta(\tau,\ \alpha))\,\zeta_\alpha(\tau,\ \alpha)$$

позволяет привести (14) к виду

$$\varphi'(0)=\int_\Delta (F[\zeta^T](\tau),\ T'(\zeta(\tau))\,\zeta_\alpha(\tau,\ 0))\,d\tau=$$
$$=\int_\Delta (T'^*(\zeta(\tau))\,F[\zeta^T](\tau),\ \zeta_\alpha(\tau,\ 0))\,d\tau. \tag{16}$$

Сравнивая соотношения (15) и (16) и ссылаясь на лемму Лагранжа, получаем равенство

$$F^T[\zeta]=T'^*(\zeta)\,F[\zeta^T].$$

Последнее равенство показывает, что *уравнения*

$$F^T[\zeta]=0 \quad \text{\textit{и}} \quad F[\zeta^T]=0$$

эквивалентны. Этот факт принято называть *инвариантностью уравнения Эйлера для кривых*.

Уравнение $F[\zeta^T]=0$ получается из уравнения $F[\zeta]=0$ путем *замены переменных* $\zeta\to\zeta^T=T(\zeta)$. *Инвариантность уравнения Эйлера означает, что преобразованное уравнение эквивалентно уравнению, которое получается, если ту же замену переменных выполнить в самом функционале*, т. е. перейти от функционала J к функционалу J^T. Инвариантность уравнения Эйлера часто используется при замене переменных в уравнении Эйлера.

Пример. Пусть $m=2$ и $F(z,\ w)=(z_1^2w_2^2+w_1^2)^{1/2}$. Положим $T(z)=\left((z_1^2+z_2^2)^{1/2},\ \operatorname{arctg}\dfrac{z_2}{z_1}\right)$. Тогда $T^{-1}(z)=(z_1\cos z_2,\ z_1\sin z_2)$ и

$$T'(z)\sim\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}} & \dfrac{z_2}{(z_1^2+z_2^2)^{1/2}}\\[2mm] \dfrac{-z_2}{z_1^2+z_2^2} & \dfrac{z_1}{z_1^2+z_2^2}\end{pmatrix},\quad \det T'(z)=(z_1^2+z_2^2)^{-1/2}.$$

Далее

$$F^T(z,\ w)=\|w\|.$$

Таким образом, экстремали функционала J^T — прямые. Экстремали функционала J, т. е. решения уравнения $F[\zeta]=0$, получаются из экстремалей γ функционала J^T преобразованием $\gamma\to\gamma^T$. Так как экстремали функционала J^T можно описать общим уравнением

$$a_1z_1+a_2z_2+a_3=0,\quad a_1,\ a_2,\ a_3\in\mathbf{R},\quad a_1^2+a_2^2>0,$$

то уравнение экстремалей функционала J имеет вид

$$a_1z_1\cos z_2+a_2z_1\sin z_2+a_3=0.$$

79. Переход к t-параметризации. Положим $m=n+1$ и введем два отображения $\varphi: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ и $\psi: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$:

$$T(z)=(T_0(z),\ \mathbf{T}(z))=(\varphi(z),\ \psi(z)).$$

Обозначим координаты вектора z через t и $\mathbf{x}$: $z=(t,\ \mathbf{x})=(z_0,\ \mathbf{z})$. Оператор $T'(z)$ естественно записывается как *блочная матрица*

$$T'=\begin{pmatrix}\varphi_t & \varphi_{\mathbf{x}}\\ \psi_t & \psi_{\mathbf{x}}\end{pmatrix}.$$

Его действие дается формулой

$$T'(z)(h_0,\ \mathbf{h})=(\varphi_t(z)h_0+\varphi_{\mathbf{x}}(z)\mathbf{h},\ \psi_t(z)h_0+\psi_{\mathbf{x}}(z)\mathbf{h})=$$
$$=\Big(\varphi_t(z)h_0+\sum\nolimits_{i=1}^n \varphi_{x_i}(z)h_i,\ \Big(\psi_{1t}(z)h_0+$$
$$+\sum\nolimits_{i=1}^n \psi_{1x_i}(z)h_i,\ \ldots,\ \psi_{nt}(z)h_0+\sum\nolimits_{i=1}^n \psi_{nx_i}(z)h_i\Big)\Big).$$

Сопряженный оператор

$$T'^*=\begin{pmatrix}\varphi_t & \psi_t^*\\ \varphi_{\mathbf{x}}^* & \psi_{\mathbf{x}}^*\end{pmatrix}$$

действует по формуле

$$T'^*(z)(h_0,\ \mathbf{h})=(\varphi_t(z)h_0+\psi_t^*(z)\mathbf{h},\ \varphi_{\mathbf{x}}^*(z)h_0+\psi_{\mathbf{x}}^*(z)\mathbf{h})=$$
$$=\Big(\varphi_t(z)h_0+\sum\nolimits_{i=1}^n \psi_{it}h_i,\ \Big(\varphi_{x_1}(z)h_0+$$
$$+\sum\nolimits_{i=1}^n \psi_{ix_1}h_i,\ \ldots,\ \varphi_{x_n}(z)h_0+\sum\nolimits_{i=1}^n \psi_{ix_n}(z)h_i\Big)\Big).$$

Ниже предполагается, что рассматриваемые кривые γ и γ^T — графики пар.

Сопоставим формулы

$$F^T[\zeta]=T'^*(\zeta)F\left[\zeta^T\right] \quad \text{и} \quad (F[\zeta],\ \zeta')=0.$$

Из первой следует

$$\mathbf{F}^T[\zeta]=\varphi_{\mathbf{x}}^*(\zeta)F_0[\zeta^T]+\psi_{\mathbf{x}}^*(\zeta)\mathbf{F}[\zeta^T],$$

из второй —

$$F_0[\zeta^T]\zeta_0^{T'}+(\mathbf{F}[\zeta^T],\ \boldsymbol{\zeta}^{T'})=0.$$

Так как кривая γ^T — график, то $\zeta_0^{T'}(\tau)\neq 0$ и последнее соотношение позволяет исключить из предыдущего $F_0[\zeta^T]$:

$$\mathbf{F}^T[\zeta]=-\varphi_{\mathbf{x}}^*(\zeta)\frac{(\mathbf{F}[\zeta^T],\ \boldsymbol{\zeta}^{T'})}{\zeta_0^{T'}}+\psi_{\mathbf{x}}^*(\zeta)\mathbf{F}[\zeta^T].$$

Воспользуемся формулой

$$\zeta^{T'}=T'(\zeta)\zeta'$$

и исключим координаты вектора $\zeta^{T'}$:

$$\zeta_0^{T'}=\varphi_t\zeta_0'+\varphi_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}',\quad \boldsymbol{\zeta}^{T'}=\psi_t\zeta_0'+\psi_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\zeta}'.$$

Результат может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{F}^T[\zeta] = S(\zeta, \zeta')\,\mathbf{F}[\zeta^T], \qquad (17)$$

где $S(z, w)$ — оператор в $\mathbf{R}^n$, действующий по формуле

$$S(z, w)\,\mathbf{h} = -\varphi_{\mathbf{x}}^*(z)\frac{(\psi_t w_0 + \psi_{\mathbf{x}}\mathbf{w}, \mathbf{h})}{\varphi_t w_0 + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{w}} + \psi_{\mathbf{x}}^*(z)\,\mathbf{h} =$$

$$= -\nabla_{\mathbf{x}}\varphi(z)\frac{(\psi_t w_0 + \psi_{\mathbf{x}}\mathbf{w}, \mathbf{h})}{\varphi_t w_0 + (\nabla\varphi, \mathbf{w})} + \psi_{\mathbf{x}}^*(z)\,\mathbf{h}.$$

Пусть теперь

$$F(z, w) = L\left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{w}}{w_0}\right)|w_0|,$$

тогда

$$F^T(z, w) = L^T\left(t, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{w}}{w_0}\right)|w_0|,$$

где

$$L^T(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = L\left(\varphi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}), \frac{\psi_t(z) + \psi_{\mathbf{x}}(z)\,\mathbf{v}}{\varphi_t(z) + \varphi_{\mathbf{x}}(z)\,\mathbf{v}}\right)|\varphi_t(z) + \varphi_{\mathbf{x}}(z)\,\mathbf{v}|.$$

Пусть $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{f}^T: \Delta^T \to \mathbf{R}^n$ суть t-параметризации кривых γ и γ^T. Так как $J(\gamma) = I(\mathbf{f})$ и $J(\gamma^T) = I(\mathbf{f}^T)$, то из определения L^T следует, что интеграл

$$I(\mathbf{f}^T) = \int_{\Delta^T} L(t, \mathbf{f}^T(t), \mathbf{f}^{T\prime}(t))\,dt$$

равен интегралу

$$I^T(\mathbf{f}) = \int_\Delta L^T(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\,dt.$$

Таким образом, переход от L к L^T или от I к I^T соответствует замене переменных в интеграле

$$\int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\,dt.$$

Перепишем формулу (17) в терминах L и L^T. При этом понадобится еще одно соотношение: если кривая γ — график, а ζ — ее параметризация, то

$$F[\zeta](\tau) = |\zeta_0'(\tau)|\,F[(\cdot, \mathbf{f}(\cdot))](\zeta_0(\tau)).$$

Это соотношение вытекает из инвариантности уравнения Эйлера относительно замены параметра (см. п. 73):

$$F[\zeta \circ \varkappa](\tau) = |\varkappa'(\tau)|\,F[\zeta](\varkappa(\tau)),$$

при этом следует учесть, что $\zeta(\tau) = (\zeta_0(\tau), \mathbf{f}(\zeta_0(\tau)))$.

Итак, пусть на γ введена t-параметризация. Тогда

$$L^T[\mathbf{f}](t) = \mathbf{F}^T[\zeta](t) = S(\zeta(t), \zeta'(t))\,\mathbf{F}[\zeta^T](t) =$$

$$= |\zeta_0^{T\prime}(t)|\,S(\zeta(t), \zeta'(t))\,\mathbf{F}[(\cdot, \mathbf{f}^T(\cdot))](\zeta_0^T(t)) =$$

$$= K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\,L[\mathbf{f}^T](\varphi(t, \mathbf{f}(t)),$$

где $K(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — оператор в $\mathbf{R}^n$:

$$K(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\varphi_t(z) + \varphi_{\mathbf{x}}(z)\mathbf{v}) S(t, \mathbf{x}, (1, \mathbf{v})).$$

Окончательно имеем

$$L^T[\mathbf{f}](t) = K(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) L[\mathbf{f}^T](\varphi(t, \mathbf{f}(t))).$$

Если T — преобразование $\mathbf{R}^m$, переводящее всякую кривую, которая является графиком, в график, то оператор $K(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ невырожден. В таком случае уравнения $L[\mathbf{f}^T] = 0$ и $L^T[\mathbf{f}] = 0$ эквивалентны. Этот факт также называют инвариантностью уравнения Эйлера.

Установим невырожденность оператора K. Фактически будет сделано большее, а именно вычислен $\det K$. При этом понадобится один вспомогательный факт из теории матриц, доказательство которого может быть найдено в [5, с. 45].

Лемма. *Пусть A — блочная матрица вида*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где a_{11} — $(k \times k)$-матрица; a_{12} — $(k \times n)$-матрица; a_{21} — $(n \times k)$-матрица и a_{22} — $(n \times n)$-матрица. Если $\det a_{11} \neq 0$, то справедлива формула

$$\det A = \det a_{11} \det (a_{22} - a_{21} a_{11}^{-1} a_{12}).$$

Утверждение очевидно при $k = n = 1$.

Переходя к оператору K, введем в $\mathbf{R}^{1+n}$ оператор

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{v} & I \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{v}$ — вектор из $\mathbf{R}^n$. Ясно, что $\det V = 1$. Составим оператор $T'V$:

$$T'V = \begin{pmatrix} \varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v} & \varphi_x \\ \psi_t + \psi_{\mathbf{x}}\mathbf{v} & \psi_{\mathbf{x}} \end{pmatrix}.$$

С одной стороны, $\det T'V = \det T'$. С другой, — если $\varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \neq$ $\neq 0$, то

$$\det T'V = (\varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v}) \det [\psi_{\mathbf{x}} - (\psi_t + \psi_{\mathbf{x}}\mathbf{v})(\varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{-1} \varphi_{\mathbf{x}}] =$$
$$= (\varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v}) \det S^*(t, \mathbf{x}, (1, \mathbf{v})) = (\varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v}) \det S(t, \mathbf{x}, (1, \mathbf{v})).$$

Таким образом,

$$\det T'(t, \mathbf{x}) = (\varphi_t(t, \mathbf{x}) + \varphi_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v}) \det S(t, \mathbf{x}, (1, \mathbf{v})).$$

Так как

$$\zeta_0^{T'}(\tau) = \varphi_t(\zeta(\tau)) \zeta_0'(\tau) + \varphi_{\mathbf{x}}(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau),$$

то условие $\varphi_t + \varphi_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \neq 0$ в точности равносильно тому, что преобразование T переводит график в график. При выполнении этого

условия с учетом невырожденности T' оператор S, а следовательно, и оператор K, благополучно определен и не вырожден:

$$\det K(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\varphi_t(t, \mathbf{x}) + \varphi_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v})^n \det S(t, \mathbf{x}, (1, \mathbf{v})) = \\ = (\varphi_t(t, \mathbf{x}) + \varphi_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})\mathbf{v})^{n-1} \det T'(t, \mathbf{x}) \neq 0.$$

80. Теорема Нетер. Теорема, которая будет здесь доказана, является одним из основных фактов теории интегральных функционалов. Ее значение определяется, впрочем, не только ролью во внутренней структуре вариационного исчисления, а и приложениями к механике, в особенности к механике полей. *Теорема Нетер устанавливает связь между свойствами симметрии механических систем и законами сохранения для них и дает техническую процедуру для отыскания сохраняющихся величин.*

Пусть J — интегральный функционал на множестве кривых в $\mathbf{R}^m$ и T — отображение $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$. *Функционал J называется инвариантным относительно преобразования T, если выполняется равенство $J = J^T$.* Равенство $J = J^T$ равносильно равенству $F = F^T$.

Пусть T_α, $\alpha \in \delta$, — путь во множестве преобразований $\mathbf{R}^m$, причем T_0 — тождественное отображение и отображение $(z, \alpha) \to T_\alpha(z)$ гладко.

Теорема Нетер. *Если функционал J инвариантен относительно преобразований T_α, $\alpha \in \delta$, то функция $\Delta \to \mathbf{R}$, задаваемая формулой*

$$\left(\nabla_w F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)), \frac{\partial T_\alpha(\zeta(\tau))}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0},$$

где $\zeta: \Delta \to \mathbf{R}^m$ — параметризация экстремали, постоянна.

Иными словами, *если функционал J инвариантен относительно преобразований T_α, $\alpha \in \delta$, то функция*

$$(z, w) \to \left(\nabla_w F(z, w), \frac{\partial T_\alpha(z)}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}$$

— первый интеграл уравнения $F[\zeta] = 0$.

Доказательство. Пусть γ — экстремаль и $\zeta: [a, b] \to \mathbf{R}^m$ — какая-либо ее параметризация. Рассмотрим отрезок $\zeta_c: [a, c] \to \mathbf{R}^m$, $c \in (a, b]$, параметризованной кривой ζ. Ему соответствует кривая γ_c. Согласно условиям теоремы функция $\varphi(\alpha) = J\left(\gamma_c^{T_\alpha}\right)$ постоянна: $J\left(\gamma_c^{T_\alpha}\right) = J(\gamma_c)$. Поэтому $\varphi'(0) = 0$. Так как γ_c — экстремаль, то

$$\varphi'(0) = \left(\nabla_w F(\zeta(c), \zeta'(c)), \frac{\partial T_\alpha(\zeta(c))}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} - \\ - \left(\nabla_w F(\zeta(a), \zeta'(a)), \frac{\partial T_\alpha(\zeta(a))}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0}.$$

Ввиду произвольности c теорема доказана.

В терминах функции L

$$F(z, w) = L(z_0, \mathbf{z}, \mathbf{w}/w_0)\,|w_0|$$

условие инвариантности функционала J относительно отображения T можно записать в виде $L = L^T$, а следовательно, в виде $I = I^T$ (см. п. 79). В условиях теоремы Нетер на экстремали, которая является t-параметризованным графиком, постоянна функция

$$\left(\hat{p}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)), \frac{\partial \psi_\alpha(t, \mathbf{f}(t))}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right) - \hat{H}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) \frac{\partial \varphi_\alpha(t, \mathbf{f}(t))}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}.$$

Иными словами, функция

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \to \left(\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \frac{\partial \psi_\alpha(t, \mathbf{x})}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right) - \hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\partial \varphi_\alpha(t, \mathbf{x})}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

является первым интегралом уравнения Эйлера $L[\mathbf{f}] = 0$.

Поясним, что φ_α и ψ_α суть координаты преобразования T_α: $T_\alpha(t, \mathbf{x}) = (\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\alpha(t, \mathbf{x}))$.

Примеры.

1) Пусть $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ не зависит от аргумента t. В этом случае функционал I инвариантен относительно преобразования $T_\alpha(t, \mathbf{x}) = (t - \alpha, \mathbf{x})$. Поэтому функция $\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, фактически не зависящая от аргумента t, — первый интеграл уравнения Эйлера.

2) Пусть $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ не зависит от i-й компоненты x_i аргумента $\mathbf{x}$. В этом случае функционал I инвариантен относительно преобразования $T_\alpha(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x} - \alpha \mathbf{e}_i)$, $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 на i-м месте. Поэтому функция

$$(\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{e}_i) = p_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$$

— первый интеграл уравнения Эйлера.

Оба эти интеграла были установлены прямым вычислением в п. 9.

В механике функция $\hat{H}$ — это *энергия системы*, а тот факт, что $\hat{H}$ является интегралом уравнений движения, называется *законом сохранения энергии*; функция $\hat{p}$ называется *импульсом*, а тот факт, что $\hat{p}$ — интеграл уравнений движения, — *законом сохранения импульса.*

3) Конечно, независимость функции Лагранжа от конфигурации системы является лишь грубой моделью независимости свойств механической системы от выбора координат в трехмерном физическом пространстве. Рассмотрим более реальный пример. Пусть $\mathbf{x} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$, где $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N \in \mathbf{R}^3$, так что $n = 3N$. Аналогично $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$, где $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N \in \mathbf{R}^3$. Допустим, что действие инвариантно относительно преобразования $(t, \mathbf{x}) \to \to (t, \mathbf{r}_1 - \alpha\xi, \ldots, \mathbf{r}_N - \alpha\xi)$, где $\alpha \in \mathbf{R}$, ξ — произвольный вектор из $\mathbf{R}^3$.

Легко убедиться, что так будет, например, для системы N попарно-взаимодействующих частиц, когда

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} \mathbf{v}_i^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} u_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j).$$

Здесь m_i — заданные числа, массы, а u_{ij} — заданные функции, потенциалы попарного взаимодействия. В этом случае

$$\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}) = t, \ \psi_\alpha(t, \mathbf{x}) = (\mathbf{r}_1 - \alpha\xi, \ \ldots, \ \mathbf{r}_N - \alpha\xi).$$

Поэтому

$$\frac{\partial\varphi_\alpha(t, \mathbf{x})}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\psi_\alpha(t, \mathbf{x})}{\partial\alpha} = -(\xi, \ \ldots, \ \xi).$$

Теорема Нетер приводит к следующему первому интегралу: $(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \to (\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), (\xi, \ldots, \xi)) = \sum_{i=1}^N (P_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \xi)$

$$P_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\hat{p}_{3i-2}, \ \hat{p}_{3i-1}, \ \hat{p}_{3i}) \in \mathbf{R}^3.$$

Ввиду произвольности ξ первым интегралом является функция

$$(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \to \sum_{i=1}^N P_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

которая называется *полным импульсом системы*. Для рассматриваемой системы

$$P_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}_i}{m_i}.$$

Читателю рекомендуется получить закон сохранения для системы, действие которой инвариантно относительно преобразования

$$(t, \mathbf{x}) \to (t, \ A(\alpha)\mathbf{r}_1, \ \ldots, \ A(\alpha)\mathbf{r}_N),$$

где $\alpha \to A(\alpha)$ — путь во множестве операторов в $\mathbf{R}^3$. Для введенной выше функции L в качестве $A(\alpha)$ можно взять любой *ортогональный оператор*, если u_{ij} зависят только от длины аргументов. Соответствующий интеграл называется в механике *полным моментом импульса*.

81. **Изломы экстремалей.** В п. 24 было введено множество $\hat{C}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, несколько более обширное, чем $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Напомним, что его элементами являются кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $\Delta \to \mathbf{R}^n$. Множество $\hat{C}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ можно считать нормированным пространством, определяя норму той же формулой, что и в пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Рассмотрим на $\hat{C}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ функционал

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \ \mathbf{f}(t), \ \mathbf{f}'(t))\, dt.$$

Примеры показывают, что функционал I может не иметь абсолютного минимума на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, но может иметь такой минимум на $\hat{C}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Происхождение конкретной задачи об отыскании точек минимума лишь в редких случаях заставляет считать, что такая точка должна принадлежать C^1, и запрещает разрывы производных. Мы не будем систематически развивать дифференциального исчисления для функционала I на $\hat{C}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Ограничимся получением необходимых условий относительного экстремума в духе краевой задачи для уравнения Эйлера.

Пусть $\mathbf{f}$ — точка экстремума функционала I в пространстве $\hat{C}^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Рассмотрим путь $\alpha \to \mathbf{f} + \alpha\mathbf{h}$, считая, что $\mathbf{h} \in C^1$ и обращается в нуль в точках разрыва производной отображения $\mathbf{f}$. Положим $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{f} + \alpha\mathbf{h})$. Обычным образом устанавливается, что

$$\varphi'(0) = \int_\Delta (L[\mathbf{f}], \ \mathbf{h})\, dt + (p[\mathbf{f}], \ \mathbf{h})\big|_\Delta = 0.$$

Отсюда следует, что всюду, кроме точек разрыва производной, выполняется уравнение Эйлера, а на концах Δ — естественные граничные условия.

Пусть $c \in (a, b)$ — точка разрыва производной функции $\mathbf{f}$. Введем функции $\theta \in C^1(\Delta)$ и $\mathbf{h} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, отличные от нуля лишь в малой окрестности точки c, не содержащей других точек разрыва производной. Пусть, кроме того, функция θ постоянна в ε-окрестности точки c. При α, удовлетворяющих условию $|\alpha\theta| < \varepsilon$, рассмотрим путь $\alpha \to \mathbf{f}_\alpha$, где

$$\mathbf{f}_\alpha(t) = \mathbf{f}(t - \alpha\theta(t)) + \alpha\mathbf{h}(t).$$

Точка ξ_α разрыва производной функции $\mathbf{f}_\alpha$ определяется уравнением $\xi_\alpha - \alpha\theta(\xi_\alpha) = c$. Решение этого уравнения обязано принадлежать ε-окрестности точки c и поэтому $\xi_\alpha = c + \alpha\theta(c)$. Следовательно,

$$\mathbf{f}_\alpha(\xi_\alpha) = \mathbf{f}(c) + \alpha\mathbf{h}(\xi_\alpha).$$

Как обычно, $\varphi'(0) = 0$, где $\varphi(\alpha) = I(\mathbf{f}_\alpha)$. Вычислим $\varphi'(0)$. Справедливо равенство

$$I(\mathbf{f}_\alpha) = \int_a^{\xi_\alpha} L(t, \mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}'_\alpha)\,dt + \int_{\xi_\alpha}^b L(t, \mathbf{f}_\alpha, \mathbf{f}'_\alpha)\,dt.$$

Воспользуемся общей формулой первой вариации и учтем, что функция $\mathbf{f}$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\varphi'(0) = \left(\hat{p}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'), \mathbf{h}(t)\right) - \hat{H}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')\,\theta(t)\Big|_{c-0}^{c+0}.$$

Благодаря произволу в выборе $\mathbf{h}(c)$ и $\theta(c)$ выполняются соотношения

$$\hat{H}(c, \mathbf{f}(c), \mathbf{f}'(c-0)) = \hat{H}(c, \mathbf{f}(c), \mathbf{f}'(c+0)),\ \hat{p}(c, \mathbf{f}(c), \mathbf{f}'(c-0)) = \hat{p}(c, \mathbf{f}(c), \mathbf{f}'(c+0)).$$

Итак, *в точке разрыва производной* $\mathbf{f}$ *должны оставаться непрерывными* $\hat{p}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')$ *и* $\hat{H}(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}')$. *Эти условия соединения экстремалей в точке разрыва производной называют условиями Вейерштрасса — Эрдмана.*

В п. 8 было установлено, что стационарная точка функционала I, принадлежащая $C^1(\Delta)$, обязана принадлежать $C^2(\Delta)$, если $L_{vv}(t, f(t), f'(t)) \neq 0$, $t \in \Delta$. Убедимся, ограничиваясь случаем $n=1$, в том, что более сильное условие $L_{vv}(t, x, v) \neq 0$ позволяет сделать такое же заключение и в пространстве $\hat{C}^1(\Delta)$. Действительно, в точке разрыва производной должно выполняться соотношение

$$L_v(c, f(c), f'(c-0)) = L_v(c, f(c), f'(c+0)).$$

Если $L_{vv}(t, x, v) \neq 0$, то функция $v \to L_v(c, f(c), v)$ строго монотонна, поэтому $f'(c-0) = f'(c+0)$. Следовательно, $f \in C^1$, а значит, $f \in C^2$.

Пример. Рассмотрим функционал I:

$$I(f) = \int_0^1 (1 - f'^2(t))^2\,dt$$

при условиях $f(0)=0$, $f(1)=0$, $n=1$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dt}(1 - f'^2(t))\,f'(t) = 0,$$

отсюда следует, что $f(t) = \alpha t + \beta$, где α, β — произвольные числа. Единственная экстремаль в пространстве $C^1[0, 1]$, удовлетворяющая граничным условиям, есть $f=0$, при этом $I(f)=1$. В пространстве $\hat{C}^1[0, 1]$ имеется, однако, еще одна функция, удовлетворяющая полученным выше необходимым условиям экстремума, в том числе условиям Вейерштрасса — Эрдмана в точке разрыва производной. Эта функция имеет вид

$$f_0(t) = \begin{cases} t, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 1-t, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

при этом $I(f_0)=0$. Так как при всех f выполняется неравенство $I(f)\geqslant 0$, то f_0 — точка абсолютного минимума. Легко видеть, что f_0 — *точка строгого абсолютного минимума.*

В том же плане можно рассмотреть изломы экстремалей функционала на множестве кривых. Определение кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой отличается от определения кривой класса C^1 заменой параметризованных кривых класса C^1, участвующих в этом определении, кусочно-непрерывно дифференцируемыми параметризованными кривыми. Множество точек кусочно-непрерывно дифференцируемой кривой содержит конечное число точек излома кривой. Конструкция пространства $C^1(\Gamma)$ без затруднений переносится на соответствующее пространство $\hat{C}^1(\Gamma)$, элементами которого являются кусочно-непрерывно дифференцируемые кривые. На этом пространстве обычной формулой определяется интегральный функционал

$$J(\gamma)=\int_\Delta F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau.$$

Его экстремальные точки, кривые в $\mathbf{R}^m$, вне точек излома удовлетворяют уравнению Эйлера, а в точках излома — условию непрерывности вектор-функции

$$\tau\to\nabla_w F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau)),$$

которое для t-параметризованных кривых равносильно условиям Вейерштрасса — Эрдмана.

82. Законы преломления и отражения. Задачи, которые будут рассмотрены в настоящем пункте, связаны с формализацией хорошо известного явления излома *(преломления или отражения) световых лучей на границе раздела двух сред.*

Пусть в $\mathbf{R}^m$ задана простая гиперповерхность M. Предположим, что функция F, определяющая интегральный функционал

$$J(\gamma)=\int_\Delta F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau$$

в $\hat{C}^1(\Gamma)$, обладает обычными свойствами гладкости всюду, кроме множества точек $(z,\ w)$ из $M\times\mathbf{R}^m$, где функция $F(z,\ w)$ и ее частные производные по z имеют предельные значения, быть может разные с разных сторон M, но гладко зависящие от $(z,\ w)$, $z\in M$, $w\in\mathbf{R}^m$ (с обычной оговоркой $w\neq 0$). Пусть γ — стационарная точка функционала J, причем γ пересекает M в точке z_0, переходя с одной стороны M на другую. Незначительно видоизменяя рассуждения предыдущего пункта, легко установить следующее.

Отрезки кривой γ, лежащие в окрестности z_0 по разные стороны M, удовлетворяют уравнению Эйлера. В самой же точке выполняется соотношение

$$([\nabla_w F(\zeta(c-0),\ \zeta'(c-0))-\nabla_w F(\zeta(c+0),\ \zeta'(c+0))],\ u)=0,\qquad(18)$$

где u — произвольный касательный вектор к M в точке z_0, а ζ — параметризация γ, причем $\zeta(c)=z_0$.

Пример 1. Пусть $F(z,\ w)=l(z)\,\|w\|$. В этом случае

$$l_-(z_0)\,\frac{(\zeta'(c-0),\ u)}{\|\zeta'(c-0)\|}=l_+(z_0)\,\frac{(\zeta'(c+0),\ u)}{\|\zeta'(c+0)\|},$$

где

$$l_{\mp}(z_0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} l(\zeta(c\mp\varepsilon)).$$

Отсюда видно, что подпространство в $\mathbf{R}^m$, содержащее векторы $\zeta'(c-0)$ и $\zeta'(c+0)$, содержит также и *вектор нормали n* к гиперповерхности M в точке z_0, кроме того,

$$l_-(z_0)\sin\left(\widehat{n,\ \zeta'(c-0)}\right)=l_+(z_0)\sin\left(\widehat{n,\ \zeta'(c+0)}\right).$$

Утверждение, выраженное последней фразой, известно в оптике под названием *закона преломления.*

Закон отражения связан с задачей на *условный экстремум.* Она состоит в отыскании экстремума интегрального функционала I в пространстве $\hat{C}^1(\Gamma)$

среди кривых, имеющих хотя бы одну точку на заданной гиперповерхности M. Пусть, как и при выводе закона преломления, кривая γ, сообщающая экстремум функционалу, пересекает M в некоторой точке z_0, причем обе касательные к γ в точке пересечения, где γ априори может иметь излом, не лежат в касательной плоскости к M в точке z_0. Нетрудно убедиться, что некоторый достаточно малый отрезок кривой γ, пересекающий M, удовлетворяет уравнению Эйлера всюду, кроме, может быть, самой точки z_0. В самой же точке должно выполняться соотношение (18).

Если кривая γ в точке z_0 переходит с одной стороны M на другую, возникает рассмотренный выше случай преломления с той, однако, разницей, что функция F должна теперь считаться гладкой, не имеющей разрыва на M. Положение окажется иным, если некоторый отрезок γ, проходящий через z_0, остается по одну сторону гиперповерхности M. Считая, что имеет место этот случай, рассмотрим

Пример 2. Пусть $F(z, w) = l(z)\|w\|$. Тогда

$$\frac{(\zeta'(c-0),\ u)}{\|\zeta'(c-0)\|} = \frac{(\zeta'(c+0),\ u)}{\|\zeta'(c+0)\|}.$$

Отсюда видно, что подпространство, содержащее векторы $\zeta'(c-0)$ и $\zeta'(c+0)$, содержит и вектор нормали n к гиперповерхности M в точке z_0, причем

$$\sin\left(\widehat{n,\ \zeta'(c-0)}\right) = \sin\left(\widehat{n,\ \zeta'(c+0)}\right).$$

Последнее утверждение известно в оптике под названием *закона отражения*.

83. Односторонний экстремум. Коротко остановимся еще на одной задаче, в которой приходится обсуждать вопрос об изломе экстремалей. Пусть M — простая гиперповерхность в $\mathbf{R}^m$, которая делит пространство на две *связные* части. Обозначим через U замыкание одной из этих частей, а через Ω — множество кривых, точки которых принадлежат U. Задача заключается в отыскании точек экстремума γ функционала

$$J(\gamma) = \int_\Delta F(\zeta,\ \zeta')\,d\tau,$$

ограниченного на множество Ω. На граничные точки кривых накладываются какие-нибудь обычные условия, например, граничные точки предполагаются заданными. Так как множество Ω не является открытым, решение задачи не обязательно удовлетворяет уравнению Эйлера $F[\zeta] = 0$. Допустим, что кривая γ, сообщающая экстремум (для определенности — минимум) функционалу J на множестве Ω, есть кусочно-гладкая кривая, состоящая из конечного числа гладких отрезков, все внутренние точки которых лежат либо внутри U, либо на границе U, т. е. на M.

Нетрудно видеть, что гладкие отрезки кривой γ, внутренние точки которых лежат внутри U, удовлетворяют уравнению Эйлера. Пусть $[c, d] \subset [a, b]$ и $\zeta : [c, d] \to \mathbf{R}^m$ — параметризованный отрезок кривой γ, точки которого лежат на M. Пусть функция $h : [a, b] \to \mathbf{R}^m$ обладает следующими свойствами: $h \in C^1$, $h(\tau) = 0$ при $\tau \notin (c, d)$ и $(h(\tau), n(\zeta(\tau))) \geqslant 0$ при $\tau \in (c, d)$. Здесь $n(z)$ — направленный внутрь U вектор единичной нормали к M в точке z. Ясно, что можно построить такую вариацию γ_α кривой γ, что точки кривой γ_α при $\alpha \geqslant 0$ принадлежат U и $\zeta_\alpha(\tau, 0) = h(\tau)$. Функция $\varphi(\alpha) = J(\gamma_\alpha)$, рассматриваемая при $\alpha \geqslant 0$, согласно предположению достигает минимума в точке $\alpha = 0$. Следовательно, $\varphi'(0) \geqslant 0$, т. е.

$$\int_\Delta (F[\zeta](\tau),\quad h(\tau))\,d\tau \geqslant 0.$$

Полагая $h(\tau) = g(\tau)\,n(\zeta(\tau))$, где g — функция $\Delta \to \mathbf{R}$ с неотрицательными значениями, находим, что

$$\int_\Delta (F[\zeta](\tau),\quad n(\zeta(\tau)))\,g(\tau)\,d\tau \geqslant 0.$$

Благодаря произвольности g получаем

$$(F[\zeta](\tau),\quad n(\zeta(\tau))) \geqslant 0.$$

Если же $(h(\tau), n(\zeta(\tau)))=0$ при $\tau \in (c, d)$, то ввиду произвольности знака h

$$\int_\Delta (F[\zeta](\tau), \quad h(\tau))\, d\tau = 0.$$

Это означает, что существует такая функция $\lambda : [c, d] \to \mathbf{R}$, что

$$F[\zeta](\tau) + \lambda(\tau)\, n(\zeta(\tau)) = 0.$$

К такому же условию мы пришли, рассматривая точки экстремума функционала J, ограниченного на множество кривых, все точки которых лежат на M (см. п. 76). Условие $(F[\zeta](\tau), n(\zeta(\tau))) \geqslant 0$ сводится к тому, что $\lambda \leqslant 0$.

В точке $\zeta(\tau_0)$ стыка двух кусков кривой γ, один из которых лежит на M, а другой — внутри U, выполняется соотношение

$$(\nabla_w F(\zeta(\tau_0), \zeta'(\tau_0 - 0)) - \nabla_w F(\zeta(\tau_0), \zeta'(\tau_0 + 0)), h) \geqslant 0,$$

где $h \in \mathbf{R}^m$ — произвольный вектор, удовлетворяющий условию $(h, n(\zeta(\tau_0))) \geqslant 0$. Указанное соотношение эквивалентно равенству

$$\nabla_w F(\zeta(\tau_0), \zeta'(\tau_0 - 0)) - \nabla_w F(\zeta(\tau_0), \zeta'(\tau_0 + 0)) = \mu n(\zeta(\tau_0)),$$

в котором μ — некоторое неотрицательное число.

В частном случае, когда $F(z, w) = \|w\|$,

$$\frac{\zeta'(\tau_0 - 0)}{\|\zeta'(\tau_0 - 0)\|} - \frac{\zeta'(\tau_0 + 0)}{\|\zeta'(\tau_0 + 0)\|} = \mu n(\zeta(\tau_0)).$$

Допустим, что $\zeta(\tau) \overline{\in} M$ при $a' < \tau < \tau_0$ и $\zeta(\tau) \in M$ при $\tau_0 < \tau < b'$. Тогда

$$(\zeta'(\tau_0 + 0), n(\zeta(\tau_0)) = 0 \text{ и } (\zeta'(\tau_0 - 0), n(\zeta(\tau_0))) \leqslant 0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{\zeta'(\tau_0 - 0)}{\|\zeta'(\tau_0 - 0)\|} - \frac{\zeta'(\tau_0 + 0)}{\|\zeta'(\tau_0 + 0)\|}, \quad n(\zeta(\tau_0)) \right) = \frac{(\zeta'(\tau_0 - 0), n(\zeta(\tau_0))}{\|\zeta'(\tau_0 - 0)\|} = \\ = \mu \|n(\zeta(\tau_0))\|^2,$$

что возможно лишь при $\mu = 0$. Таким образом,

$$\frac{\zeta'(\tau_0 - 0)}{\|\zeta'(\tau_0 - 0)\|} = \frac{\zeta'(\tau_0 + 0)}{\|\zeta'(\tau_0 + 0)\|}.$$

Это значит, что направления векторов $\zeta'(\tau_0 - 0)$ и $\zeta'(\tau_0 + 0)$ совпадают. Так как их длины можно сделать равными за счет выбора параметризации, то можно считать, что $\zeta'(\tau_0 - 0) = \zeta'(\tau_0 + 0)$. Это соотношение можно считать выполненным во всех точках стыка.

§ 2. Общая форма первой вариации для кратных интегралов

С небольшими модификациями построения предыдущего параграфа могут быть перенесены на функционалы, аргументами которых являются k-поверхности. Мы ограничимся выводом общей формы первой вариации для кратных интегралов, а в качестве следствий установим инвариантность уравнения Эйлера — Остроградского и получим теорему Нетер.

84. Общая форма первой вариации. Пусть γ — пара $\{D, u\}$, где D — *основная область* в $\mathbf{R}^k$, а u — функция класса C^1 на D. Обозначим множество таких пар через Γ. Рассмотрим на Γ интегральный функционал

$$I(\gamma) = \int_D L(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

считая $L(\mathbf{x}, u, \mathbf{w})$ гладкой функцией на $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$. Введем путь $\gamma_\alpha = \{D_\alpha, u_\alpha\}$, $\alpha \in \delta$, в множестве Γ и функцию $\varphi(\alpha) = I(\gamma_\alpha)$.

Общей формой первой вариации для кратных интегралов называется следующая формула для производной функции φ:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{D_\alpha} \left[L_u(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x})) \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha} + \right.$$
$$\left. + \left(\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x})), \frac{\partial \nabla u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha} \right) \right] d\mathbf{x} +$$
$$+ \int_{\partial D_\alpha} L(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x})) v_\alpha(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}}. \qquad (1)$$

Появившаяся здесь функция $v_\alpha : \partial D_\alpha \to \mathbf{R}$ определяется следующим образом: ее значение в точке $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \partial D_\alpha$, равно *скорости*, с которой граница ∂D_α при изменении α смещается из точки $\mathbf{x}$ в направлении внешней нормали к ∂D_α. Более точно: рассмотрим точку пересечения поверхности ∂D_β и нормали к ∂D_α в точке $\mathbf{x}$. Обозначим расстояние от точки пересечения до точки $\mathbf{x}$ через $d_{\beta, \alpha}(\mathbf{x})$. Нормаль считается *ориентированной во вне поверхности* ∂D_α, и расстоянию $d_{\beta, \alpha}(\mathbf{x})$ приписывается соответствующий знак. По определению полагаем

$$v_\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \beta} d_{\beta, \alpha}(\mathbf{x}) \Big|_{\beta = \alpha}.$$

Формула (1) справедлива, конечно, лишь в предположении, что основная область D_α зависит от α некоторым правильным образом, а функция $(\mathbf{x}, \alpha) \to u_\alpha(\mathbf{x})$ принадлежит классу C^1 и имеет непрерывную производную $\frac{\partial \nabla u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha}$ на множестве точек $(\mathbf{x}, \alpha)$, где $\mathbf{x} \in D_\alpha$, $\alpha \in \delta$. Ради краткости мы не будем аккуратно выяснять характер зависимости $\alpha \to D_\alpha$ и останемся в этом вопросе на *интуитивном* уровне. В согласии с такой договоренностью в выводе формулы (1) останется некоторый пробел. Существо дела будет, впрочем, выяснено достаточно полно.

Формула (1) аналогична общей форме первой вариации для однократного интеграла. Вид добавочного слагаемого, интеграла по поверхности ∂D_α, соответствует формуле

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{D_\alpha} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\partial D_\alpha} \psi(\mathbf{x}) v_\alpha(\mathbf{x})\, dS_{\mathbf{x}},$$

в которой ψ — непрерывная функция на множестве $\bigcup_\alpha D_\alpha$. Для доказательства этой формулы составим разность

$$\int_{D_{\alpha + \Delta\alpha}} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{D_\alpha} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

В окрестности поверхности ∂D_α введем координаты $\mathbf{x} = K(y, n)$, где y — точка ∂D_α, ближайшая к $\mathbf{x}$, а n — ориентированное расстояние от y до $\mathbf{x}$. Ясно, что

$$\int_{D_{\alpha + \Delta\alpha}} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \int_{D_\alpha} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} =$$
$$= \int_{\partial D_\alpha} dS_y \int_0^{d_{\alpha + \Delta\alpha, \alpha}(y)} \psi(\mathbf{x}) J(y, n)\, dn \sim \Delta\alpha \int_{dD_\alpha} \psi(y) v_\alpha(y)\, dS_y.$$

Здесь учтено, что элемент объема $d\mathbf{x}$ допускает представление $d\mathbf{x} = l(y, n)\, dS_y\, dn$, которое при $n=0$ принимает вид $d\mathbf{x} = dS_y dn$. Последнее соотношение в сущности является определением dS_y. На этом будем считать формулу (1) доказанной.

Если $u_\alpha \in C^2(\bar{D}_\alpha)$, то формулу (1) можно переписать следующим образом:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{D_\alpha} L[u_\alpha](\mathbf{x}) \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha}\, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_\alpha} \Big[L(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x}))\, v_\alpha(\mathbf{x}) +$$
$$+ (\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x})), \mathbf{n}(\mathbf{x})) \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha} \Big] dS_{\mathbf{x}}.$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к границе ∂D_α в точке $\mathbf{x}$. Эта формула, если D_α не зависит от α и, следовательно, $v_\alpha = 0$, сводится к формуле для производной вдоль пути в пространстве $C^1(D)$.

Наконец, если функция u_α удовлетворяет уравнению Эйлера — Остроградского $L[u_\alpha] = 0$, то

$$\varphi'(\alpha) = \int_{\partial D_\alpha} \Big[L(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x}))\, v_\alpha(\mathbf{x}) +$$
$$+ (\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x}, u_\alpha(\mathbf{x}), \nabla u_\alpha(\mathbf{x})), \mathbf{n}(\mathbf{x})) \frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha} \Big] dS_{\mathbf{x}}.$$

85. Инвариантность уравнений Эйлера. В пространстве $\mathbf{R}^m$, $m = k+1$, введем координаты $\mathbf{x}, u: z = (\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbf{R}^k$, $u = z_{k+1} \in \mathbf{R}$. Преобразованию T пространства $\mathbf{R}^m$ соответствуют отображения: $\boldsymbol{\varphi}: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ и $\psi: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, так что $T(z) = (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, u), \psi(\mathbf{x}, u))$. Множество точек $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in D$ (назовем его *графиком пары* $\{D, u\}$), переводится отображением T в множество $(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})), \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})))$, $\mathbf{x} \in D$. Предположим, что отображение $\mathbf{x} \to \Phi(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in D$, обратимо, его образ — основная область (пусть D^T) и обратное отображение $\Phi^{-1}: D^T \to \mathbf{R}^k$ является гладким, например, принадлежит C^1 или C^2. Множество $(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})), \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})))$, $\mathbf{x} \in D$, совпадает с множеством $(\boldsymbol{\xi}, \psi(\Phi^{-1}(\boldsymbol{\xi})))$, $\boldsymbol{\xi} \in D^T$, которое является графиком пары $\gamma^T = \{D^T, u^T\}$, $u^T = \psi \circ \Phi^{-1}: D^T \to \mathbf{R}$. Отображение Φ не обязательно обратимо, не обязательно имеет своим образом основную область, а его обратное не обязательно является гладким. Будем предполагать в дальнейшем, что *отображение* Φ *обладает перечисленными свойствами при любых* $\gamma = \{D, u\}$. В таком случае производная

$$\Phi'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) + (\boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))\, u'(\mathbf{x})$$

всюду невырождена, т. е. всюду невырожден оператор $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(x, u) + \boldsymbol{\varphi}_u(\mathbf{x}, u)\tilde{w}$, $(\mathbf{x}, u) \in \mathbf{R}^m$, где $\tilde{w}$ — произвольный оператор $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$.

Вычислим ∇u^T. Из формулы $u^T(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = \psi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$ следует $u^{T\prime}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}\mathbf{h} + \boldsymbol{\varphi}_u u'\mathbf{h}) = \psi_{\mathbf{x}}\mathbf{h} + \psi_u u'\mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^k$, где $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$.

Отсюда

$$u^{T\prime}(\xi) = (\psi_x + \psi_u u')(\varphi_x + \varphi_u u')^{-1}$$

и

$$\nabla u^T(\xi) = (\varphi_x^* + u'^*\varphi_u^*)^{-1}(\nabla_x \psi + \psi_u \nabla u) = (\varphi_x^* + \nabla u \varphi_u^*)^{-1}(\nabla_x \psi + \psi_u \nabla u). \quad (2)$$

Справа $u = u(x)$, $\varphi = \varphi(x, u(x))$.

Пути $\gamma_\alpha = \{D_\alpha, u_\alpha\}$ в множестве Γ отвечает путь $(\gamma_\alpha)^T = \gamma_\alpha^T = \left\{D_\alpha^T, u_\alpha^T\right\}$. Вычислим $\frac{\partial u_\alpha^T}{\partial \alpha}$. С этой целью продифференцируем равенства

$$\xi = \varphi(x, u_\alpha(x)), \; u_\alpha^T(\xi) = \psi(x, u_\alpha(x))$$

по α, считая ξ фиксированным. При фиксированном ξ первое равенство определяет x как функцию от α: $x = \varkappa(\alpha)$. Поэтому

$$0 = \varphi_x \varkappa' + \varphi_u \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\varkappa'\right),$$

$$\frac{\partial u_\alpha^T(\xi)}{\partial \alpha} = \psi_x \varkappa' + \psi_u \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\varkappa'\right).$$

Исключим отсюда $\varkappa'$:

$$\frac{\partial u_\alpha^T(\xi)}{\partial \alpha} = T_1\left(x, u_\alpha(x), \frac{\partial u_\alpha(x)}{\partial x}\right)\frac{\partial u_\alpha(x)}{\partial \alpha},$$

где

$$T_1(x, u, \tilde{w}) = \psi_u - (\psi_x + \psi_u \tilde{w})(\varphi_x + \varphi_u \tilde{w})^{-1}\varphi_u.$$

Положим

$$W = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \tilde{w} & 1 \end{pmatrix},$$

$\det W = 1$. Ясно, что

$$T'W = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_u \\ \psi_x & \psi_u \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \varphi_x + \varphi_u \tilde{w} & \varphi_u \\ \psi_x + \psi_u \tilde{w} & \psi_u \end{pmatrix}.$$

В силу леммы п. 79

$$\det T' = T_1 \cdot \det(\varphi_x + \varphi_u \tilde{w}).$$

Завершив этим предварительные построения, *перейдем к доказательству инвариантности уравнения Эйлера — Остроградского.* В интеграле

$$I(\gamma^T) = \int_{D^T} L(\xi, u^T(\xi), \nabla u^T(\xi))\, d\xi$$

выполним замену переменной интегрирования $\xi \to x$, $\xi = \Phi(x)$. В силу (2)

$$I(\gamma^T) = \int_D L^T(x, u(x), \nabla u(x))\, dx,$$

где

$$L^T(x, u, w) =$$
$$= L(\varphi(x, u), \psi(x, u), B^{-1}(x, u, w)(\nabla_x \psi(x, u) + \psi_u(x, u) w)) \,|\det B(x, u, w)|,$$

$B(\mathbf{x}, u, \mathbf{w})$ — оператор в $\mathbf{R}^k$, действующий согласно фурмуле

$$B(\mathbf{x}, u, \mathbf{w})\mathbf{h} = \varphi_{\mathbf{x}}^*(\mathbf{x}, u)\mathbf{h} + \mathbf{w}\varphi_u^*(\mathbf{x}, u)\mathbf{h}.$$

При этом

$$\det B(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) = \det B^*(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) =$$
$$= \det[\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) + \varphi_u(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))u'(\mathbf{x})] = \det \Phi'(\mathbf{x}).$$

Введем функционал I^T:

$$I^T(\gamma) = I(\gamma^T) = \int_D L^T(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\alpha) = I(\gamma_\alpha^T)$. Для нее справедливо и другое представление: $\varphi(\alpha) = I^T(\gamma_\alpha)$. Положим $\gamma_\alpha = \{D, u + \alpha h\}$, u, $h: D \to \mathbf{R}$. При этом D_α не зависит от $\alpha: D_\alpha = D$ и, следовательно, D_α^T не зависит от $\alpha: D_\alpha^T = D^T$. Тогда, сопоставляя общую форму первой вариации, примененную к двум представлениям функции φ, получим

$$\int_{D^T} L[u_\alpha^T](\xi)\frac{\partial u_\alpha^T(\xi)}{\partial\alpha}\,d\xi = \int_D L^T[u_\alpha](\mathbf{x})\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial\alpha}\,d\mathbf{x}.$$

Если выразить $\frac{\partial u_\alpha^T(\xi)}{\partial\alpha}$ через $\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial\alpha} = h(\mathbf{x})$ и выполнить в первом интеграле замену переменной интегрирования $\xi \to \mathbf{x}: \xi = \Phi(\mathbf{x})$, то последнее соотношение при $\alpha = 0$ примет вид

$$\int_D \{L[u^T](\varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))K(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), u'(\mathbf{x})) - L^T[u](\mathbf{x})\}h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,$$

где

$$K(\mathbf{x}, u, \mathbf{w}, \tilde{w}) = T_1(\mathbf{x}, u, \tilde{w})\,|\det B(\mathbf{x}, u, \mathbf{w})|.$$

Ввиду произвольности h отсюда следует

$$L^T[u](\mathbf{x}) = L[u^T](\varphi(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})))K(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), u'(\mathbf{x})). \qquad (3)$$

Так как

$$|K(\mathbf{x}, u, \mathbf{w}, \tilde{w})| = |\det T'(\mathbf{x}, u)| \neq 0,$$

то уравнения

$$L^T[u] = 0 \quad \text{и} \quad L[u^T] = 0$$

эквивалентны. Этот факт и принято называть *инвариантностью уравнения Эйлера — Остроградского*.

В частном случае, когда преобразование T сводится к *замене аргумента:* $T(\mathbf{x}, u) = (\varphi(\mathbf{x}), u)$, формула (3) принимает вид

$$L^T[u](\mathbf{x}) = L[u^T](\varphi(\mathbf{x}))\,|\det\varphi'(\mathbf{x})|.$$

Пример. Пусть $L(\mathbf{x}, u, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2$. В этом случае $L[u] = -\Delta u$. Функция L^T дается формулой

$$L^T(\mathbf{x}, u, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\|D^{-1}(x)\mathbf{w}\|^2\,|\det D(\mathbf{x})|,$$

где $D(\mathbf{x}) = \varphi'(\mathbf{x})$. Поэтому

$$\nabla_{\mathbf{w}} L^T(\mathbf{x},\ u,\ \mathbf{w}) = |\det D(\mathbf{x})|\, A^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{w}, \text{ где } A(\mathbf{x}) = D^*(\mathbf{x})\, D(\mathbf{x}).$$

Следовательно,

$$(\nabla_{\mathbf{x}},\ |\det D(\mathbf{x})|\, A^{-1}(\mathbf{x})\, \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})) = \\ = |\det D(\mathbf{x})|\, \Delta_\xi u^T(\xi) = |\det D(\mathbf{x})|\, \Delta_\xi u(\varphi^{-1}(\xi)),$$

где $\xi = \varphi(\mathbf{x})$. Воспользуемся равенством $\det A(\mathbf{x}) = (\det D(\mathbf{x}))^2$, тогда

$$\Delta_\xi u(\varphi^{-1}(\xi)) = |\det A(\mathbf{x})|^{-1/2} (\nabla_{\mathbf{x}},\ |\det A(\mathbf{x})|^{1/2}\, \nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x})).$$

Это соотношение можно рассматривать как формулу *замены переменных в операторе Лапласа*. Оператор $A(\mathbf{x})$ уже встречался в предыдущем параграфе. *Элемент длины* в $\mathbf{R}^m$

$$ds = \|d\xi\| = (d\xi_1^2 + \ldots + d\xi_m^2)^{1/2}$$

после замены переменных $\xi \to \mathbf{x} = \varphi^{-1}(\xi)$ приобретает вид

$$ds = \|D(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\| = (A(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},\ d\mathbf{x})^{1/2}.$$

Матрица оператора $A(\mathbf{x})$ симметрична и поэтому полностью определяется элементом ds. Таким образом, коэффициенты дифференциального оператора, в который после замены переменных переходит оператор Лапласа, определяются элементом длины, выраженным в новых переменных. Читателю рекомендуется в качестве упражнения получить отсюда известные выражения для оператора Лапласа в полярных, цилиндрических и сферических координатах.

86. Теорема Нетер. Как и для функционалов на кривых, теорема Нетер приводит к некоторым явным законам сохранения для функционалов, инвариантных относительно преобразований T_α, $\alpha \in \delta$, образующих путь T_α в множестве преобразований пространства $\mathbf{R}^m$. Охарактеризуем путь T_α более точно. Положим $T_\alpha = (\varphi_\alpha,\ \psi_\alpha)$, $\varphi_\alpha : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$, $\psi_\alpha : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, а для точек пространства $\mathbf{R}^m$, как и в п. 85, введем координаты $(\mathbf{x},\ u) : z = (\mathbf{x},\ u)$. *Будем предполагать, что для каждой пары* $\gamma = \{D,\ u\}$ *при всех* α, $\alpha \in \delta$, *определена пара* $\gamma_\alpha = \gamma^{T_\alpha} = \{D_\alpha,\ u_\alpha\}$, *т. е.* 1) *отображение* $\Phi_\alpha : D \to \mathbf{R}^k$, *заданное формулой* $\Phi_\alpha(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))$, *обратимо,* 2) *образ отображения* D_α — *основная область,* 3) *обратное отображение* Φ_α^{-1} *является гладким. Предположим далее, что для каждой пары* $\gamma = \{D,\ u\}$ *путь* γ_α *удовлетворяет условиям, которые были наложены при выводе общей формы первой вариации, т. е.:* 1) D_α *зависит от* α *правильным образом,* 2) *функция* $(\mathbf{x},\ \alpha) \to u_\alpha(\mathbf{x})$ *принадлежит классу* C^2. *Наконец, дополнительно предположим, что* T_0 — *тождественное преобразование*: $T_0(z) = z$.

Если путь γ_α порожден преобразованиями T_α пространства $\mathbf{R}^m$, то общей формуле для производной функции $\varphi(\alpha) = I(\gamma_\alpha)$ можно придать специальный вид, который представляет интерес независимо от приложений к теореме Нетер. Множество D_α и его граница ∂D_α в этом случае являются образами при преобра-

зовании T_α множества D и его границы ∂D. Таким образом, граница ∂D_α состоит из точек $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} \in \partial D$. Ясно, что скорость $v_\alpha(\mathbf{x})$ смещения границы ∂D_α в точке $\mathbf{x}$ в направлении внешней нормали к ∂D_α (см. п. 84) дается формулой

$$v_\alpha(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \Phi_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha},\ \mathbf{n}(\mathbf{x})\right),$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к ∂D_α в точке $\mathbf{x}$. Общая форма первой вариации содержит также производную $\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha}$, $\mathbf{x} \in D_\alpha$. Незначительно видоизменяя рассуждения, с помощью которых в предыдущем пункте была выведена формула для $\frac{\partial u_\alpha^T}{\partial \alpha}$, получим

$$\frac{\partial u_\alpha(\xi)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} - \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u} u'\right)\left(\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} u'\right)^{-1} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}.$$

Справа $u = u(\mathbf{x})$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))$, $\psi_\alpha = \psi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))$. При $\alpha = 0$

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \mathbf{x}} = I, \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial u} = 0,$$

поэтому

$$\left.\frac{\partial u_\alpha(\xi)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\left[\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} - u' \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}\right]\right|_{\alpha=0} = \left.\left[\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} - \left(\nabla u,\ \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha}\right)\right]\right|_{\alpha=0}.$$

Подставим полученные выражения в общую форму первой вариации:

$$\varphi'(0) = \int_D L[u](\mathbf{x}) \left.\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} d\mathbf{x} +$$

$$+ \int_{\partial D} \left(\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \left\{\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x})\right) \frac{\partial \psi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha} -\right.$$

$$\left.\left. - [-L(\ldots) + \nabla_{\mathbf{w}} L(\ldots) u'(\mathbf{x})] \frac{\partial \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha}\right\}_{\alpha=0}\right) dS_{\mathbf{x}}.$$

Читателю следует обратить внимание на аналогию между выведенной формулой и общей формой первой вариации для однократного интеграла.

Введем вектор-функцию $j: D \to \mathbf{R}^k$, полагая

$$j(\mathbf{x}) = \left\{\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha} -\right.$$

$$\left. - [-L(\ldots) + \nabla_{\mathbf{w}} L(\ldots) u'(x)] \frac{\partial \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha}\right\}_{\alpha=0} =$$

$$= \left\{\nabla_{\mathbf{w}} L(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha} -\right.$$

$$\left. - \left[-L(\ldots) \frac{\partial \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha} + \nabla_{\mathbf{w}} L(\ldots) \left(\nabla u(\mathbf{x}),\ \frac{\partial \varphi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial \alpha}\right)\right]\right\}_{\alpha=0}.$$

В координатной записи

$$j_\mu(\mathbf{x}) = \Big\{L_{w_\mu}(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}),\ \nabla u(\mathbf{x}))\frac{\partial\psi_\alpha(\mathbf{x},\ u(\mathbf{x}))}{\partial\alpha} - \\ - \Big[-L(\ldots)\frac{\partial\varphi_{\alpha\mu}(\ldots)}{\partial\alpha} + L_{w_\mu}(\ldots)\sum_{l=1}^{k} u_{x_l}(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi_{\alpha l}(\ldots)}{\partial\alpha}\Big]\Big\}_{\alpha=0}.$$

С помощью этой функции общая форма первой вариации может быть представлена следующим образом:

$$\varphi'(0) = \int_D L[u](\mathbf{x})\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\mathbf{x} + \int_{\partial D}(\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \mathbf{j}(\mathbf{x}))\,dS.$$

Интеграл по границе ∂D легко записать как интеграл по D:

$$\varphi'(0) = \int_D L[u](\mathbf{x})\frac{\partial u_\alpha(\mathbf{x})}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} d\mathbf{x} + \int_D \operatorname{div}\mathbf{j}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \tag{4}$$

где $\operatorname{div} j(\mathbf{x}) = \sum_{\mu=1}^{k} j_{\mu x_\mu}(\mathbf{x})$.

Условимся говорить, что функционал I инвариантен относительно преобразования T, если $I^T = I$. В терминах функции L инвариантность означает, что $L^T = L$.

Теорема. *Если функционал I инвариантен относительно преобразований T_α, $\alpha \in \delta$, а функция $u: D \to \mathbf{R}$ удовлетворяет уравнению Эйлера — Остроградского $L[u] = 0$, то при $\mathbf{x} \in D$ выполняется соотношение* $\operatorname{div} j(\mathbf{x}) = 0$.

Для доказательства рассмотрим пару $\gamma' = \{D',\ u\}$, где $D' \subset D$. В силу инвариантности имеем $\varphi' = 0$, где $\varphi(\alpha) = I((\gamma')_\alpha^T)$. При $\alpha = 0$ воспользуемся формулой (4). Ввиду произвольности D' имеем утверждение теоремы.

87. Законы сохранения. *Закон сохранения энергии* для систем, функция Лагранжа L которых не зависит от времени, *справедлив* и в случае систем с бесконечным числом степеней свободы, т. е. *в случае полей. При этом несущественно, являются поля локальными или нет.* Вывод закона сохранения энергии для поля, действие которого имеет вид

$$S_\Delta(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,dt,\ L: \mathbf{R}\times E\times E \to \mathbf{R},$$

в формульном плане не отличается от вывода закона сохранения энергии для систем с конечным числом степеней свободы. Его формулировка такова: если функция Лагранжа L не зависит от времени, то функция

$$\hat{H}(u,\ v),$$

где

$$\hat{H}(u,\ v) = -L(u,\ v) + L_v(u,\ v)\,v,$$

есть первый интеграл уравнения Эйлера, т. е. функция $\hat{H}(\mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))$ постоянна на движениях $\mathbf{f}$ системы.

Напомним, что для *локального поля*

$$L(t,\ u,\ v) = \int_\Omega \mathscr{L}(t,\ \mathbf{x},\ u(x),\ v(x),\ u'(x))\,dx \text{ или} = \int_\Omega \mathscr{L}(t,\ \mathbf{x},\ u,\ v,\ \nabla u)\,d\mathbf{x}.$$

Для такого поля

$$\hat{H}(u, v) = \int_\Omega [-\mathscr{L}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) + \mathscr{L}_v(\ldots) v(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x}.$$

Пример. Пусть $\mathscr{L}(t, \mathbf{x}, u, v, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w}^2 - U(u)$. В этом случае

$$H(u, v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} v^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\nabla u(\mathbf{x}))^2 + U(u(\mathbf{x}))\right] d\mathbf{x}.$$

В качестве упражнения читателю рекомендуется вычислить энергию для *нагруженных локальных полей.*

Теорема Нетер для кратных интегралов приводит к другой схеме вывода законов сохранения для локальных полей. Чтобы применить теорему Нетер к локальным полям, будем рассматривать действие S_Δ как функционал на функциях u, заданных иа цилиндрах вида $D = \Delta \times \Omega$. Для согласования обозначений с обозначениями механики условимся при переходе от общего функционала на функциях $u: D \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ к локальным полям вместо координат $(x_1, \ldots, x_k)$ использовать координаты $(x_0, x_1, \ldots \ldots, x_l)$, $l = k - 1$, и писать $x = (t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_l) \in \Omega$. Функционалу S_Δ и каждому преобразованию T_α пространства точек $z = (\mathbf{x}, u)$ можно сопоставить вектор-функцию $j: D \to \mathbf{R}^k$ с координатами $(j_0, \mathbf{j})$:

$$j_0(x) = \mathscr{L}_v(t, \mathbf{x}, u(x), u_t(x), \nabla_\mathbf{x} u(x)) \left.\frac{\partial \psi_\alpha(x, u(x))}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} -$$

$$- \left\{-\mathscr{L}(\ldots) \frac{\partial \varphi_{\alpha 0}(\ldots)}{\partial \alpha} + \mathscr{L}_v(\ldots) \left[u_t \frac{\partial \varphi_{\alpha 0}(\ldots)}{\partial \alpha} + \left(\nabla_\mathbf{x} u, \frac{\partial \varphi_\alpha(\ldots)}{\partial \alpha}\right)_{\mathbf{R}^l}\right]\right\}_{\alpha=0},$$

$$\mathbf{j}(x) = \nabla_\mathbf{w} \mathscr{L}(t, x, u(x), u_t(x), \nabla_\mathbf{x} u(x)) \left.\frac{\partial \psi_\alpha(x, u(x))}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} -$$

$$- \left\{-\mathscr{L}(\ldots) \frac{\partial \varphi_\alpha(\ldots)}{\partial \alpha} + \nabla_\mathbf{w} \mathscr{L}(\ldots) \left[u_t \frac{\partial \varphi_{\alpha 0}(\ldots)}{\partial \alpha} + \left(\nabla_\mathbf{x} u, \frac{\partial \varphi_\alpha(\ldots)}{\partial \alpha}\right)_{\mathbf{R}^l}\right]\right\}_{\alpha=0}.$$

Здесь введены координаты преобразования $T: T(t, \mathbf{x}, u) = (\varphi_0(t, \mathbf{x}, u), \boldsymbol{\varphi}(\ldots), \psi(\ldots))$.

Теорема Нетер для локальных полей. *Если действие* S_Δ *инвариантно относительно преобразований* T_α, $\alpha \in \delta$, *пространства точек* $(t, \mathbf{x}, u) \in \mathbf{R}^{k+1}$, *а функция* u *удовлетворяет уравнению Эйлера — Остроградского* $\mathscr{L}[u] = 0$, *то выполняется соотношение*

$$\frac{\partial j_0(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Это соотношение называется *дифференциальным законом сохранения,* отвечающим преобразованию T_α. Дифференциальный закон сохранения показывает, что изменение со временем интеграла

$$J_{\Omega'}(t) = \int_{\Omega'} j_0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

по произвольной области $\Omega' \subset \Omega$ определяется потоком векторного поля $\mathbf{j}$ через границу области Ω':

$$\frac{d}{dt} J_{\Omega'}(t) + \int_{\partial \Omega'} (\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{j}(t, \mathbf{x}))\, dS = 0.$$

Чтобы получить последнее соотношение, достаточно проинтегрировать дифференциальный закон сохранения по Ω' и воспользоваться формулой Гаусса — Остроградского. Если в дополнение к высказанным выше условиям теоремы Нетер равен нулю поток векторного поля $\mathbf{j}$ через границу Ω, т. е.

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \mathbf{j}(t,\ \mathbf{x}))\,dS = 0,$$

то $J_\Omega(t)$ является интегралом движения, иначе говоря, $J_\Omega(t)$ не зависит от t. Последнее утверждение называют *интегральным законом сохранения*. Если $\Omega = \mathbf{R}^l$, то условие равенства нулю потока через $\partial\Omega$ заменяется условием достаточно быстрого убывания векторного поля $\mathbf{j}(t,\ \mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \to \infty$.

В качестве примеров рассмотрим *новый вывод закона сохранения энергии* и вывод *закона сохранения импульса для локального поля*. Пусть плотность функции Лагранжа не зависит от времени, тогда действие инвариантно относительно преобразований $T_\alpha(t,\ \mathbf{x},\ u) = (t-\alpha,\ \mathbf{x},\ u)$. В этом случае $\varphi_{\alpha 0}(t,\ \mathbf{x},\ u) = t-\alpha$, $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(t,\ \mathbf{x},\ u) = \mathbf{x}$ и $\psi_\alpha(t,\ \mathbf{x},\ u) = u$. Поэтому $\frac{\partial\varphi_{\alpha 0}}{\partial\alpha} = -1$, $\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_\alpha}{\partial\alpha} = 0$, $\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\alpha} = 0$, следовательно,

$$j_0(x) = -\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) + \mathscr{L}_v(\ldots)\,u_t(x),$$
$$\mathbf{j}(x) = \nabla_{\mathbf{w}}\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x))\,u_t(x).$$

Дифференциальный закон сохранения выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t}[-\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) + {}_v(\mathscr{L}\ldots)\,u_t(x)] +$$
$$+ \mathbf{div}\,[\nabla_{\mathbf{w}}\mathscr{L}(x,\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x))\,u_t(x)] = 0.$$

Интегральный закон сохранения

$$J_\Omega(t) = \int_\Omega [-\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) + \mathscr{L}_v(\ldots)\,u_t(x)]\,dx = \mathrm{const}$$

является в данном случае *законом сохранения энергии*. Условие, при котором выполняется закон сохранения энергии, имеет вид

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}(\mathbf{x}),\ \nabla_{\mathbf{w}}\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x)))\,u_t(x)\,dS = 0.$$

Оно выполняется в силу уравнений движения, которые наряду с уравнением Эйлера — Остроградского включают в себя естественные граничные условия

$$(n(\mathbf{x}),\ \nabla_{\mathbf{w}}\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u(x),\ u_t(x),\ \nabla_{\mathbf{x}} u(x))) = 0$$

на боковой поверхности цилиндра $\Delta \times \Omega$. Если $\Omega = \mathbf{R}^l$, естественные граничные условия заменяются, как уже говорилось, условиями достаточно быстрого стремления функции u и ее производных к нулю на бесконечности. Плотность функции Лагранжа $\mathscr{L}(\mathbf{x},\ u,\ v,\ \mathbf{w})$ считается при этом быстро стремящейся к нулю, когда $\mathbf{x} \to \infty$, u, v, $\mathbf{w} \to 0$.

Обращаясь к *закону сохранения импульса*, предположим, что плотность функции Лагранжа $\mathscr{L}(t, \mathbf{x}, u, v, \mathbf{w})$ не зависит от $\mathbf{x}$. Тогда действие инвариантно относительно преобразований $T_\alpha(t, \mathbf{x}, u) = (t, \mathbf{x} - \alpha\xi, u)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\xi \in \mathbf{R}^l$ — фиксированный вектор. В этом случае

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha 0}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \alpha} = -\xi, \quad \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha} = 0,$$

$$j_0(x) = \mathscr{L}_v(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) (\nabla_{\mathbf{x}} u(x), \xi),$$

$$\mathbf{j}(x) = -\mathscr{L}(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) \xi + \nabla_{\mathbf{w}} \mathscr{L}(\ldots) (\nabla_{\mathbf{x}} u(x), \xi).$$

Дифференциальный закон сохранения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} [\mathscr{L}_v(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) (\nabla_{\mathbf{x}} u(x), \xi)] +$$
$$+ \operatorname{div} [-\mathscr{L}(\ldots) \xi + \nabla_{\mathbf{w}} \mathscr{L}(\ldots) (\nabla_{\mathbf{x}} u(x), \xi)] = 0.$$

Интегральный закон сохранения в конечной области Ω, вообще говоря, не выполняется, так как поток

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{j}(\mathbf{x}))\, dS = \int_{\partial\Omega} [-\mathscr{L}(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) \times$$
$$\times (\mathbf{n}(\mathbf{x}), \xi) + (\mathbf{n}(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{w}} \mathscr{L}(\ldots)) (\nabla_{\mathbf{x}} u(x), \xi)]\, dS =$$
$$= -\int_{\partial\Omega} \mathscr{L}(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) (\mathbf{n}(\mathbf{x})), \xi)\, dS$$

в общем случае не равен нулю. При $\Omega = \mathbf{R}^l$ интегральный закон сохранения выполняется, это значит, что не зависит от времени интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^l} \mathscr{L}_v(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) (\xi, \nabla_{\mathbf{x}} u(x))\, d\mathbf{x},$$

а тем самым, ввиду произвольности ξ, не зависит от времени и интеграл

$$\int_{\mathbf{R}^l} \mathscr{L}_v(t, u(x), u_t(x), \nabla_{\mathbf{x}} u(x)) \nabla_{\mathbf{x}} u(x)\, d\mathbf{x}$$

с векторными значениями. Вектор

$$\hat{P}(t, u, v) = \int_{\mathbf{R}^l} \mathscr{L}_v(t, u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})) \nabla u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

называют полным импульсом поля в состоянии (u, v) в момент времени t. Постоянство этого вектора на движениях, т. е. тот факт, что этот функционал с векторными значениями является интегралом уравнения Эйлера—Остроградского, называется *законом сохранения импульса*.

Обобщения. Все построения настоящего параграфа легко переносятся на тот случай, когда пара γ имеет вид $\gamma = \{D, \mathbf{u}\}$, где D — основная область, а $\mathbf{u}$ — вектор-функция $D \to \mathbf{R}^n$. Интегральный функционал на таких парах дается формулой

$$I(\gamma) = \int_D L(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}'(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

в которой $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, w)$ — функция на $D \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{L}(\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n)$. На этот раз T есть преобразование пространства $\mathbf{R}^m$, $m = k + n$. Аналогично прежнему вводятся координаты $z = (\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$, и отображения

$$\varphi\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k, \quad \psi\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n.$$

При этом L^T представляется в существенном прежней формулой и прежнюю формулировку имеет теорема Нетер, хотя, конечно, детали их содержания и координатная запись меняются. Напомним, что третий аргумент функции L, оператор w: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$, в координатной записи является матрицей $\{w_{ij}\}_{\substack{i=1, \ldots, n \\ j=1, \ldots, k}}$.

Соотношение, выражающее теорему Нетер, имеет на этот раз вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

где

$$\mathbf{j}_r(x) = \left\{ \sum_{p=1}^{n} L_{w_{rp}} \frac{\partial \psi_{\alpha p}}{\partial \alpha} - \left[-L \cdot \frac{\partial \varphi_{\alpha r}}{\partial \alpha} + \sum_{p=1}^{n} L_{w_{rp}} \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \frac{\partial \varphi_{\alpha q}}{\partial \alpha} \right] \right\}_{\alpha=0}.$$

Можно без труда перенести на этот случай законы сохранения энергии и импульса для локальных полей.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА ПОЛЯ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Уравнения Эйлера — специальный, хотя и очень важный с точки зрения приложений, класс дифференциальных уравнений.

Тема этой главы — специфика уравнений Эйлера. Она проявляется, с одной стороны, в том, что уравнение Эйлера можно привести к чрезвычайно симметричной системе дифференциальных уравнений первого порядка, к уравнениям Гамильтона, а с другой стороны, в том, что существуют некоторые выделенные множества экстремалей, поля экстремалей, геометрическая теория которых сыграла важную роль и в самом вариационном исчислении, и в связанных с ним дисциплинах. Первоначально поля экстремалей возникли в оптике как множества лучей, которые следует ассоциировать с волной, порожденной, например, точечным источником. Некоторые вопросы геометрической теории уравнения Эйлера или уравнений Гамильтона излагаются по традиции в курсах механики.

§ 1. Уравнения Гамильтона

88. Преобразование Лежандра функций на $\mathbf{R}^n$. Пусть задана функция $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ класса C^2. Рассмотрим ее градиент ∇F. Напомним, что ∇F — отображение пространства $\mathbf{R}^n$ в себя. *Предположим, что ∇F — обратимое отображение и его значения пробегают все пространство* $\mathbf{R}^n$. Введем на $\mathbf{R}^n$ функцию G:

$$G(\mathbf{p}) = (\mathbf{p},\ \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}),\ \ \mathbf{v} = (\nabla F)^{-1}(\mathbf{p}).$$

Функция G называется преобразованием Лежандра функции F. Преобразование Лежандра встречается не только в теории уравнения Эйлера, оно часто используется в геометрии и является одним из основных элементов математического аппарата такой важной физической дисциплины, как *термодинамика.* В настоящем пункте мы опишем основные свойства преобразования Лежандра для пространства $\mathbf{R}^n$.

Пример. Пусть A — самосопряженный линейный оператор в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим на $\mathbf{R}^n$ квадратичную функцию

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

В этом случае $\nabla F = A$. Будем считать оператор A обратимым; из линейной алгебры известно, что при этом его значения пробегают все пространство. Введем функцию G:

$$G(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}(A\mathbf{v}, \mathbf{v}), \text{ где } \mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{p},$$

откуда

$$G(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}(A^{-1}\mathbf{p}, \mathbf{p}).$$

Отметим также равенство $G(\mathbf{p}) = F(\mathbf{v})$, в котором $\mathbf{p} = A\mathbf{v}$.

Продолжим общие рассмотрения. Положим $\Phi = (\nabla F)^{-1}$ и будем считать, что отображение Φ непрерывно дифференцируемо. Напомним, что это свойство Φ при $F \in C^2(\mathbf{R}^n)$ обеспечивается обратимостью оператора $\nabla F'(\mathbf{v})$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ при любом $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. При сделанном предположении функция G непрерывно дифференцируема. Вычислим ее дифференциал, пользуясь свойством инвариантности:

$$dG(\mathbf{p};\ d\mathbf{p}) = (\nabla G(\mathbf{p}),\ d\mathbf{p}) = (\mathbf{v},\ d\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ d\mathbf{v}) - dF(\mathbf{v};\ d\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\ d\mathbf{p}).$$

Отсюда следует $\nabla G(\mathbf{p}) = \mathbf{v} = \Phi(\mathbf{p})$, так что $\nabla G = \Phi$. Формула $\nabla G = \Phi$ показывает, что отображение ∇G обратимо, что его значения пробегают все пространство $\mathbf{R}^n$ и что справедливо соотношение $(\nabla G)^{-1} = \nabla F$. Благодаря этому можно ввести преобразование Лежандра функции G:

$$\mathbf{v} \to (\mathbf{v},\ \mathbf{p}) - G(\mathbf{p}), \text{ где } \mathbf{p} = \nabla F(\mathbf{v}).$$

Воспользуемся определением функции G: $(\mathbf{v},\ \mathbf{p}) - G(\mathbf{p}) = (\mathbf{v},\ \mathbf{p}) - (\mathbf{p},\ \mathbf{w}) + F(\mathbf{w})$, где $\mathbf{w} = \Phi(\mathbf{p}) = (\nabla F)^{-1}(\mathbf{p}) = \mathbf{v}$. Поэтому $(\mathbf{v}, \mathbf{p}) - G(\mathbf{p}) = F(\mathbf{v})$. Это значит, что преобразование Лежандра функции G совпадает с функцией F. Иначе говоря, двукратное применение преобразования Лежандра возвращает к исходной функции. Всякое отображение, двукратное применение которого дает тождественное отображение, называется инволюцией. Таким образом, *преобразование Лежандра — инволюция.*

Легко видеть, что $G \in C^2(\mathbf{R}^n)$ и $(\nabla G)^{-1} \in C^1(\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n)$, если $F \in C^2(\mathbf{R}^n)$ и $(\nabla F)^{-1} \in C^1$. Поэтому функции G и F, связанные преобразованием Лежандра, равноправны: функция G — преобразование Лежандра функции F тогда и только тогда, когда F — преобразование Лежандра функции G. Чтобы отразить это равноправие, *принято говорить, что функции F и G двойственны (по Юнгу).*

Выше мы убедились, что ∇F и ∇G — взаимно-обратные отображения, так что

$$\nabla G(\nabla F(\mathbf{v})) = \mathbf{v},\ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n.$$

Продифференцируем обе стороны этого соотношения: воспользовавшись формулой для производной сложной функции, получим

$$\nabla G'(\mathbf{p})\,\nabla F'(\mathbf{v}) = I, \tag{1}$$

где I — тождественное отображение $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, а $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ связаны стандартным соотношением $\mathbf{p} = \nabla F(\mathbf{v})$. Итак, линейные операторы $\nabla G'(\mathbf{p})$ и $\nabla F'(\mathbf{v})$ взаимно-обратны.

Пусть заданы дважды непрерывно дифференцируемые функции: F: $\mathbf{R}^{k+n} \to \mathbf{R}$ и G: $\mathbf{R}^{k+n} \to \mathbf{R}$. Будем записывать точки пространства $\mathbf{R}^{k+n}$ как упорядоченные пары $(\mathbf{y}, \mathbf{v})$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Пусть функции $\mathbf{v} \to F(\mathbf{y}, \mathbf{v})$ и $\mathbf{p} \to G(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ при каждом $\mathbf{y}$ двойственны по Юнгу, так что

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{y}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}} F(\mathbf{y}, \mathbf{v}).$$

Вычислим дифференциал G:

$$dG = (\mathbf{v}, d\mathbf{p}) + (\mathbf{p}, d\mathbf{v}) - (\nabla_{\mathbf{y}} F, d\mathbf{y}) - (\nabla_{\mathbf{v}} F, d\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, d\mathbf{p}) - (\nabla_{\mathbf{y}} F, d\mathbf{y}).$$

Отсюда следует, что

$$\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = -\nabla_{\mathbf{y}} F(\mathbf{y}, \mathbf{v}). \tag{2}$$

Укажем условия, обеспечивающие обратимость отображения ∇F. Как известно, *локальная обратимость отображения* ∇F, т. е. обратимость отображения ∇F, ограниченного на достаточно малую окрестность заданной точки $\mathbf{v}$, *обеспечивается обратимостью отображения* $\nabla F'(\mathbf{v})$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Для геометрической интерпретации отображения ∇F рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ график функции F. Вектор $(\nabla F(\mathbf{v}), -1)$ является вектором нормали к этому графику в точке $(\mathbf{v}, F(\mathbf{v}))$. Если график функции F — *выпуклая гиперповерхность*, то векторы нормали в двух разных точках этого графика линейно-независимы. Это гарантирует обратимость отображения ∇F. График будет выпуклой гиперповерхностью, если $d^2F(\mathbf{v}; \mathbf{h}) > 0$ или $d^2F(\mathbf{v}; \mathbf{h}) < 0$ при произвольных $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$, $\mathbf{h} \neq 0$. В зависимости от знака график обращен выпуклостью вниз или вверх и функция F называется соответственно выпуклой или вогнутой. Из формулы (1) видно, что выпуклость или вогнутость функции F влечет за собою выпуклость или вогнутость функции G. Действительно, выпуклость F равносильна положительности всех собственных значений самосопряженного оператора $\nabla F'(\mathbf{v})$ при всех $\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. В силу (1) собственные значения оператора $\nabla G'(\mathbf{p})$ обратны к собственным значениям $\nabla F'(\mathbf{v})$. В приложениях преобразование Лежандра часто применяется именно к выпуклым или вогнутым функциям. Для них можно отказаться от условия $F \in C^2(\mathbf{R}^n)$ и даже не требовать непрерывной дифференцируемости F. При этом, впрочем, приходится несколько обобщить само определение преобразования Лежандра. Такое обобщение часто используется в геометрии и термодинамике.

Заканчивая этот пункт, отметим, что функции F и G, связанные преобразованием Лежандра, могут быть заданы не на всем

пространстве $\mathbf{R}^n$, а на некоторых открытых множествах D и D_1, $F: D \to \mathbf{R}$, $G: D_1 \to \mathbf{R}$, которые переводятся друг в друга отображениями $\nabla F: D \to D_1$ и $\nabla G: D_1 \to D$.

89. Уравнения Гамильтона. Пусть $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ — функция $\mathbf{R} \times \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. *Уравнениями Гамильтона*, или *каноническими равнениями* (*Гамильтона*), *называют систему дифференциальных равнений вида*

$$\mathbf{f}'(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)), \quad \mathbf{g}'(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))$$

для пары вектор-функций $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$. Функция H, определяющая уравнения Гамильтона, обычно называется *функцией Гамильтона*, или *гамильтонианом*. Пусть функции $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ и $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ при фиксированных t и $\mathbf{x}$ как функции последних аргументов двойственны по Юнгу. В этом случае *уравнения Гамильтона эквивалентны уравнению Эйлера* $L[\mathbf{f}] = 0$. Эквивалентность означает, что функция $\mathbf{f}$ удовлетворяет уравнению Эйлера тогда и только тогда, когда $\mathbf{f}$ — первая координата пары $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, удовлетворяющей уравнениям Гамильтона.

При установлении эквивалентности решению $\mathbf{f}$ уравнения Эйлера сопоставляется пара $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, где

$$\mathbf{g}(t) = \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)).$$

Инволютивность преобразования Лежандра дает

$$\mathbf{f}'(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)),$$

что совпадает с первым уравнением из системы двух уравнений Гамильтона. В силу уравнения Эйлера

$$\mathbf{g}'(t) = \nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)).$$

Если учесть формулу (2), это соотношение совпадает со вторым уравнением из системы уравнений Гамильтона

$$\mathbf{g}'(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)).$$

Итак, уравнения Гамильтона получены как следствие уравнений Эйлера. Обратив приведенные рассуждения, получим уравнение Эйлера как следствие уравнений Гамильтона.

Функция Лагранжа L и функция Гамильтона H одновременно зависят или не зависят от первого аргумента, так как $L_t = -H_t$. В силу теоремы Нетер для не зависящих от t функций Лагранжа уравнение Эйлера имеет первый интеграл вида

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

Записанный в терминах пары $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, этот интеграл превращается в функцию Гамильтона $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, которая, таким образом, является первым интегралом уравнений Гамильтона. Впрочем, из уравнений Гамильтона следует формула

$$\frac{d}{dt} H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = H_t(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)),$$

так что тот факт, что не зависящая от t функция Гамильтона — первый интеграл уравнений Гамильтона, легко выводится и без ссылки на теорему Нетер. Проверим последнюю формулу:

$$\frac{d}{dt} H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = H_t(\ldots) + (\nabla_{\mathbf{x}} H(\ldots), \mathbf{f}'(t)) +$$
$$+ (\nabla_{\mathbf{p}} H(\ldots), \mathbf{g}'(t)) = H_t(\ldots) - (\mathbf{g}'(t), \mathbf{f}'(t)) + (\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}'(t)) = H_t(\ldots).$$

В п. 48 был выделен класс так называемых *натуральных систем*, функция Лагранжа которых имеет вид $L = T - U$, где T (кинетическая энергия) является квадратичной функцией скорости, а U (потенциальная энергия) не зависит от скорости. Для системы с n степенями свободы

$$T(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(A(t, \mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad U(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = U(t, \mathbf{x}),$$

причем $A(t, \mathbf{x})$ — самосопряженный оператор в $\mathbf{R}^n$, который мы дополнительно будем считать обратимым. Для такой системы $\nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} T(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, поэтому можно воспользоваться вычислениями из примера п. 88:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = T(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + U(t, \mathbf{x}), \text{ где } \mathbf{p} = A(t, \mathbf{x})\mathbf{v}.$$

Таким образом, функция Гамильтона подобной системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий. Если $A(t, \mathbf{x})$ — тождественный оператор, то

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 - U(t, \mathbf{x}), \quad H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + U(t, \mathbf{x})$$

и уравнения Гамильтона имеют вид

$$\mathbf{f}' = \mathbf{g}, \quad \mathbf{g}' = -\nabla_{\mathbf{x}} U(t, \mathbf{f}).$$

Задавшись функцией H на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, рассмотрим интегральный функционал

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_\Delta [(\mathbf{g}(t), \mathbf{f}'(t)) - H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))]\, dt.$$

Функционал J будет рассматриваться на множестве функций $(\mathbf{f}, \mathbf{g}): \Delta \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{f} \in C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, $\mathbf{g} \in C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Норму элемента $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ следует задать формулой

$$\|(\mathbf{f}, \mathbf{g})\| = \|\mathbf{f}\|_{C^1} + \|\mathbf{g}\|_C.$$

Непосредственно видно, что *уравнение Эйлера для функционала J совпадает с уравнениями Гамильтона*

$$\frac{\delta J(\mathbf{f}, \mathbf{g})}{\delta \mathbf{g}} = \mathbf{f}' - \nabla_{\mathbf{p}} H = 0, \quad \frac{\delta J(\mathbf{f}, \mathbf{g})}{\delta \mathbf{f}} = -\mathbf{g}' + \nabla_{\mathbf{x}} H = 0.$$

Обсудим связь между функционалом J и функционалом I:

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt.$$

Выше была установлена эквивалентность уравнений Эйлера для J и I при соответствии

$$\mathbf{f} \leftrightarrow (\mathbf{f},\ \mathbf{g}), \quad \text{где} \quad \mathbf{g}(t) = \nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)).$$

При этом же соответствии имеет место равенство

$$I(\mathbf{f}) = J(\mathbf{f},\ \mathbf{g}). \tag{3}$$

Действительно,

$$(\mathbf{p},\ \mathbf{v}) - H(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p}) = L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}), \quad \text{если} \quad \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}).$$

Поэтому

$$J(\mathbf{f},\ \mathbf{g}) = \int_{\Delta} L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,dt = I(\mathbf{f}).$$

Как следствие, равенство (3) выполняется, если $\mathbf{f}$ — решение уравнения Эйлера. Функционал J содержит производную $\mathbf{f}'$ линейно, поэтому он не может иметь точек экстремума (см. п. 21). Экстремальная задача для функционала J, эквивалентная экстремальной задаче для функционала I, выглядит довольно своеобразно. Она состоит в следующем. Вначале при фиксированной функции $\mathbf{f}$ ищется точка максимума функционала $J(\mathbf{f},\ \mathbf{g})$ по аргументу $\mathbf{g}$. Она удовлетворяет соотношению

$$\frac{\delta J(\mathbf{f},\ \mathbf{g})}{\delta \mathbf{g}(t)} = -\mathbf{f}'(t) - \nabla_{\mathbf{p}} H(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g}) = 0,$$

которое можно решить относительно $\mathbf{g}$:

$$\mathbf{g}(t) = \nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}').$$

В точке максимума $J(\mathbf{f},\ \mathbf{g}) = I(\mathbf{f})$. Разыскивая далее точки минимума $J(\mathbf{f},\ \mathbf{g})$ при найденной связи между $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, получим точку минимума функционала I. Мы не будем останавливаться на точном выяснении условий, при которых справедливо описанное выше соотношение между экстремальными задачами для функционалов J и I.

Отметим еще, что уравнение Эйлера $L[\mathbf{f}] = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{x}} L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}_1) - \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}_1) = 0, \\ \mathbf{f}' - \mathbf{f}_1 = 0. \end{cases}$$

Если оператор $\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$ не вырожден, предложенная система эквивалентна уравнению Эйлера для функционала

$$J_1(\mathbf{f},\ \mathbf{f}_1) = \int_{\Delta} [(\nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}_1),\ \mathbf{f}' - \mathbf{f}_1) + L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}_1)]\,dt,$$

которое содержит два соотношения

$$\frac{\delta J_1(\mathbf{f},\ \mathbf{f}_1)}{\delta \mathbf{f}} = \nabla_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}_1)(\mathbf{f}' - \mathbf{f}_1) + \nabla_{\mathbf{x}} L(\ldots) - \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L(\ldots) = 0,$$

$$\frac{\delta J_1(\mathbf{f},\ \mathbf{f}_1)}{\delta \mathbf{f}_1} = \nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}_1)(\mathbf{f}' - \mathbf{f}_1) = 0.$$

На парах $(\mathbf{f}, \mathbf{f}_1)$ вида $(\mathbf{f}, \mathbf{f}')$ функционал J_1 сводится к функционалу I: $J_1(\mathbf{f}, \mathbf{f}') = I(\mathbf{f})$.

90. Канонические преобразования. В гл. IV были рассмотрены преобразования $I \to I^T$ функционала I, порождаемые преобразованиями T пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ точек $(t, \mathbf{x})$. Переход к функционалу J открывает новые возможности. Аргументом функционала J является пара функций $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, благодаря чему можно рассматривать преобразования $J \to J^D$ функционала J, порождаемые преобразованиями D более обширного пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$ точек $z = (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$. Другими словами, в уравнениях Гамильтона можно делать замену переменных, перепутывающую координаты $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$. Общий интегральный функционал J на множестве пар $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ имеет вид

$$J(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \int_\Delta M(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}'(t))\, dt,$$

где $M(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ — функция на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Введем координаты отображения D: $D(z) = (\varphi(z), \boldsymbol{\psi}(z), \boldsymbol{\chi}(z))$. Преобразованный функционал J^D согласно п. 79 дается формулой

$$J^D(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_\Delta M^D(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}'(t))\, dt,$$

где

$$M^D(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = M\left(\varphi(\mathbf{z}), \boldsymbol{\psi}(z), \boldsymbol{\chi}(z), \frac{\boldsymbol{\psi}_t + \boldsymbol{\psi}_\mathbf{x}\mathbf{v} + \boldsymbol{\psi}_\mathbf{p}\mathbf{r}}{\varphi_t + \varphi_\mathbf{x}\mathbf{v} + \varphi_\mathbf{p}\mathbf{r}}, \frac{\boldsymbol{\chi}_t + \boldsymbol{\chi}_\mathbf{x}\mathbf{v} + \boldsymbol{\chi}_\mathbf{p}\mathbf{r}}{\varphi_t + \varphi_\mathbf{x}\mathbf{v} + \varphi_\mathbf{p}\mathbf{r}}\right) |\varphi_t + \varphi_\mathbf{x}\mathbf{v} + \varphi_\mathbf{p}\mathbf{r}| =$$
$$= M\left(\varphi(z), \boldsymbol{\psi}(z), \boldsymbol{\chi}(z), \frac{d\boldsymbol{\psi}(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))}{d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))}, \frac{d\boldsymbol{\chi}(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))}{d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))}\right) |d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))|.$$

Для функционала J, связанного с каноническими уравнениями, функция M имеет специальный вид:

$$M(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) - H(z).$$

В этом случае

$$M^D(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) =$$
$$= \left[\left(\boldsymbol{\chi}(z), \frac{d\boldsymbol{\psi}(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))}{d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))}\right) - H(D(z))\right] |d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))| = \operatorname{sign} d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))\,[(\boldsymbol{\chi}(z), d\boldsymbol{\psi}(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))) - H(D(z))\, d\varphi(z; (1, \mathbf{v}, \mathbf{r}))].$$

Если преобразование D переводит кривую γ, которая является графиком вектор-функции $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) : \Delta \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, в кривую γ^D, которая является графиком некоторой вектор-функции $(\mathbf{f}^D, \mathbf{g}^D) : \Delta^D \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, то знак $\sigma = \operatorname{sign} d\varphi(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t); 1, \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}'(t))$ не зависит от t.

Преобразование $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to K(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\boldsymbol{\psi}(x, \mathbf{p}), \boldsymbol{\chi}(x, \mathbf{p}))$ *пространства* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *называется каноническим, если существует такая функция* $\sum(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, *что выполняется соотношение*

$$(\boldsymbol{\chi}, d\boldsymbol{\psi}) = (\mathbf{p}, d\mathbf{x}) + d\textstyle\sum.$$

Для того чтобы существовала такая функция Σ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_{kx_i}\psi_{kx_j}-\chi_{kx_j}\psi_{kx_i}\right)=0,$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_{kp_i}\psi_{kp_j}-\chi_{kp_j}\psi_{kp_i}\right)=0,$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_{kp_i}\psi_{kx_j}-\chi_{kx_j}\psi_{kp_i}\right)=\delta_{ij}.$$

Нетрудно проверить, что эти условия соответствуют симметричности производных

$$\Sigma_{x_ix_j}=\Sigma_{x_jx_i},\quad \Sigma_{p_ip_j}=\Sigma_{p_jp_i},\quad \Sigma_{p_ix_j}=\Sigma_{x_jp_i}$$

и тем самым должны быть известны читателю как условия существования функции Σ.

Предположим, что преобразование D имеет вид $D(z)=(t,\ \psi(z),\ \chi(z))$ и при каждом t является каноническим преобразованием пространства $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$. Это значит, что, существует функция $S(z)$, удовлетворяющая соотношению

$$(\chi,\ d\psi-\psi_t\,dt)=(\mathbf{p},\ d\mathbf{x})+dS-S_t\,dt.$$

В таком случае

$$(\chi,\ d\psi)-H(D(z))\,d\varphi=(\chi,\ \psi_t)\,dt+(\mathbf{p},\ d\mathbf{x})+dS-S_t\,dt-$$
$$-H(D(z))\,dt=(\mathbf{p},\ d\mathbf{x})-H^D(z)\,dt+dS,$$

где $H^D(z)=H(D(z))+S_t(z)-(\chi(z),\ \psi_t(z))$. При этом

$$J^D(\mathbf{f},\ \mathbf{g})=\sigma\int_\Delta[(\mathbf{g}(t),\ \mathbf{f}'(t))-H^D(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g})+dS(t,\ \mathbf{f},\mathbf{g};\ 1\ \ \mathbf{f}',\mathbf{g}')]\,dt=$$
$$=\sigma\left\{\int_\Delta[(\mathbf{g}(t),\ \mathbf{f}'(t))-H^D(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g})]\,dt+S(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t))\Big|_\Delta\right\}.$$

Присутствие функции S не влияет на вид уравнения Эйлера. Уравнение Эйлера для функционала J^D, так же как и для функционала J, является системой уравнений Гамильтона

$$\mathbf{f}'=\nabla_{\mathbf{p}}H^D(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g}),\qquad \mathbf{g}'=-\nabla_{\mathbf{x}}H^D(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g}).$$

Примеры.

1) Обозначим через $\mathbf{C}^n$ n-мерное *комплексное векторное пространство*, элементами которого являются последовательности $\mathbf{c}=(c_1,\ \ldots,\ c_n)$ n комплексных чисел. Формула $\mathbf{c}=\mathbf{x}+i\mathbf{p}$, в которой $\mathbf{x},\ \mathbf{p}\in\mathbf{R}^n$, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $\mathbf{C}^n$ и $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, при этом $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ следует рассматривать как элементы $\mathbf{C}^n$, имеющие вещественные координаты. Условимся писать $\mathbf{x}=\operatorname{Re}\mathbf{c}$, $\mathbf{p}=\operatorname{Im}\mathbf{c}$. Пусть U — *унитарный оператор* в $\mathbf{C}^n$, т. е. комплексно-линейное отображение $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$, удовлетворяющее соотношению

$$(U\mathbf{c},\ U\mathbf{c}')=(\mathbf{c},\ \mathbf{c}'),$$

где $\mathbf{c},\ \mathbf{c}'\in\mathbf{C}^n$, а скалярное произведение на $\mathbf{C}^n$ считается заданным обычной формулой $(\mathbf{c},\ \mathbf{c}')=\sum_{i=1}^{n}c_i\bar{c}'_i$. Отметим, что

$$(\mathbf{x}+i\mathbf{p},\ \mathbf{x}'+i\mathbf{p}')=[(\mathbf{x},\ \mathbf{x}')+(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')]+i\,[(\mathbf{p},\ \mathbf{x}')-(\mathbf{x},\ \mathbf{p}')].$$

Оператор U порождает оператор K в пространстве $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$:

$$K(\mathbf{x},\ \mathbf{p})=(\operatorname{Re}U(\mathbf{x}+i\mathbf{p}),\ \operatorname{Im}U(\mathbf{x}+i\mathbf{p})).$$

Убедимся в том, что K — *каноническое преобразование*:

$$(\chi, d\psi)=\frac{1}{2}d(\chi, \psi)+\frac{1}{2}[(\chi, d\psi)-(\psi, d\chi)]=$$

$$=\frac{1}{2}d(\chi, \psi)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\psi+i\chi, d\psi+id\chi)=$$

$$=\frac{1}{2}d(\chi, \psi)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(U(\mathbf{x}+i\mathbf{p}), U(d\mathbf{x}+id\mathbf{p}))=$$

$$=\frac{1}{2}d(\chi,\psi)+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\mathbf{x}+i\mathbf{p}, d\mathbf{x}+id\mathbf{p})=\frac{1}{2}d(\chi, \psi)+$$

$$+\frac{1}{2}[(\mathbf{p}, d\mathbf{x})-(\mathbf{x}, d\mathbf{p})]=\frac{1}{2}d[(\chi, \psi)-(\mathbf{p}, \mathbf{x})]+(\mathbf{p}, d\mathbf{x}).$$

При $n=1$ $U=e^{i\alpha}$, где $\alpha\in\mathbf{R}$. Оператор K пр дставляет собою *поворот плоскости* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$:

$$K(x, p)=(\cos\alpha\, x-\sin\alpha\, p, \sin\alpha\, x+\cos\alpha\, p).$$

При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $K(\mathbf{x}, \mathbf{p})=(-\mathbf{p}, \mathbf{x})$, так что преобразование K меняет ролями координаты вектора $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

2) Преобразования ψ пространства $\mathbf{R}^n$ порождают специальный класс канонических преобразований K:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{p})=(\psi(\mathbf{x}), \psi'^{*-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}).$$

Здесь $\psi'(\mathbf{x})$ — производная отображения ψ в точке $\mathbf{x}$, т. е. оператор в $\mathbf{R}^n$; $\psi'^{*}(\mathbf{x})$ — сопряженный оператор; $\psi'^{*-1}(\mathbf{x})$ — оператор, обратный к $\psi'^{*}(\mathbf{x})$. Покажем, что K — каноническое преобразование:

$$(\chi, d\psi)=\left(\psi'^{*-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}, \psi'(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)=\left(\psi'^{*}(\mathbf{x})\psi'^{*-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}, d\mathbf{x}\right)=(\mathbf{p}, d\mathbf{x}).$$

Подобные канонические преобразования K называются *координатными*.

Преобразование ψ порождает преобразование пространства $\mathbf{R}^{n+1}: T(t, \mathbf{x})=(t, \psi(\mathbf{x}))$. Ему соответствует преобразование функционалов: $I\to I^T$. Если перейти от функционала I к функционалу J и аналогичным образом от функционала I^T к функционалу, зависящему от пары $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, который мы обозначим $J^{(T)}$, то окажется, что $J^{(T)}=J^D$, где $D(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})=(t, K(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$. Предоставляем читателю проверить это утверждение самостоятельно. Если $\psi=A$ — линейный оператор, то $K(\mathbf{x}, \mathbf{p})=(A\mathbf{x}, A^{*-1}\mathbf{p})=(\operatorname{Re}U(\mathbf{x}+i\mathbf{p}), \operatorname{Im}U(\mathbf{x}+i\mathbf{p}))$, где $U(\mathbf{x}+i\mathbf{p})=A\mathbf{x}+iA^{*-1}\mathbf{p}$. Если A — *ортогональный оператор в* $\mathbf{R}^n$, т. е. $(A\mathbf{x}, A\mathbf{x}')=(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, то U — унитарный оператор.

91. Теорема Нетер. Зададим функцию $S:\mathbf{R}^{2n+1}\to\mathbf{R}$ и сопоставим функционалу

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{g})=\int_\Delta[(\mathbf{g}, \mathbf{f}')-H(t, \mathbf{f}, \mathbf{g})]\,dt$$

функционал

$$J_s(\mathbf{f}, \mathbf{g})=\int_\Delta[(\mathbf{g}, \mathbf{f}')-H(t, \mathbf{f}, \mathbf{g})+dS(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}; 1, \mathbf{f}', \mathbf{g}')]\,dt.$$

Теорема. *Если функционал J_s инвариантен относительно преобразований $D_\alpha(z)=(\varphi_\alpha(z), \psi_\alpha(z), \chi_\alpha(z))$, $D_0(z)=z$, пространства $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, зависящих от параметра $\alpha\in\mathbf{R}$, т. е. $J_s^{D_\alpha}=J_s$, то функция*

$$\left[\left(\mathbf{p}, \frac{\partial\psi_\alpha(z)}{\partial\alpha}\right)-H(z)\frac{\partial\varphi_\alpha(z)}{\partial\alpha}+dS\left(z; \frac{\partial D_\alpha(z)}{\partial\alpha}\right)\right]_{\alpha=0}$$

— *первый интеграл канонических уравнений*

$$\mathbf{f}' = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{g}' = -\nabla_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Сформулированное утверждение есть не что иное, как *теорема Нетер* п. 80, примененная к функционалу J_s. Действительно, если

$$L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = g_0(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{g}_1(t, \mathbf{x}), \mathbf{v}),$$

где $g_0 : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\mathbf{g}_1 : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, то

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -g_0(t, \mathbf{x}), \quad \hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}_1(t, \mathbf{x}).$$

Если соответствующий функционал I инвариантен относительно преобразований $T_\alpha(t, \mathbf{x}) = (\varphi_\alpha(t, \mathbf{x}), \psi_\alpha(t, \mathbf{x}))$, то согласно теореме Нетер п. 80 функция

$$\left[g_0(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_\alpha(t, \mathbf{x})}{\partial \alpha} + \left(\mathbf{g}_1(t, \mathbf{x}), \frac{\partial \psi_\alpha(t, \mathbf{x})}{\partial \alpha}\right)\right]_{\alpha=0}$$

— первый интеграл уравнения Эйлера для функционала I. В случае функционала J_s роль $\mathbf{x}$ играет пара $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, роль $\mathbf{v}$ — пара $(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, роль L — функция M:

$$M(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = -H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) + S_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) + \\ + (\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{v}) + (\nabla_{\mathbf{p}} S(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \mathbf{r}),$$

линейная относительно $(\mathbf{v}, \mathbf{r})$, наконец, роль T_α играет преобразование D_α. Первый интеграл уравнения Эйлера для функционала J_s имеет вид

$$\left\{[-H(z) + S_t(z)] \frac{\partial \varphi_\alpha(z)}{\partial \alpha} + \left(\mathbf{p} + \nabla_{\mathbf{x}} S(z), \frac{\partial \psi_\alpha(z)}{\partial \alpha}\right) + \\ + \left(\nabla_{\mathbf{p}} S(z), \frac{\partial \chi_\alpha(z)}{\partial \alpha}\right)\right\}_{\alpha=0} = \\ = \left[\left(p, \frac{\partial \psi_\alpha(z)}{\partial \alpha}\right) - H(z) \frac{\partial \varphi_\alpha(z)}{\partial \alpha} + dS\left(z; \frac{\partial D_\alpha(z)}{\partial \alpha}\right)\right]_{\alpha=0},$$

что и утверждается в теореме.

Замечание. Теорема Нетер для функционала I также может быть обогащена за счет добавления к функции L полного дифференциала, однако в приложениях надобности в подобном обобщении теоремы обычно не возникает.

Пример. Пусть $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$ — функция Лагранжа n-мерного *гармонического осциллятора*. Действие

$$I(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \int_\Delta [\|\mathbf{f}'(t)\|^2 - \|\mathbf{f}(t)\|^2]\, dt$$

инвариантно относительно преобразования $T(t, \mathbf{x}) = (t, A\mathbf{x})$, где A — ортогональный оператор в $\mathbf{R}^n$. Как следствие, первым интегралом уравнения Эйлера является функция $(\mathbf{v}, \dot{A}\mathbf{x})$, где $\dot{A} = \frac{d}{d\alpha} A(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$, а $A(\alpha)$ — *путь во множестве ортогональных операторов, удовлетворяющий условию* $A(0) = I$. Множество производных $\dot{A}$ совпадает с множеством *антисамосопряженных операторов*

в $\mathbf{R}^n : (\dot{A})^* = -\dot{A}$. Соответствующая функция Гамильтона имеет вид $H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2$. Ей отвечает функционал

$$J(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_\Delta \left[(\mathbf{g}, \mathbf{f}') - \frac{1}{2}(\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2)\right] dt.$$

Пусть $S(z) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, тогда

$$J_s(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2}\int_\Delta \{(\mathbf{g}, \mathbf{f}') - (\mathbf{f}, \mathbf{g}')] - [\|\mathbf{f}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2]\} \, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Delta \{\operatorname{Im}(\mathbf{f} + i\mathbf{g}, \mathbf{f}' + i\mathbf{g}') - \operatorname{Re}\|\mathbf{f} + i\mathbf{g}\|^2\} \, dt.$$

Функционал J_s инвариантен относительно преобразований $D(z) = (t, K(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, где K — линейное преобразование, порожденное унитарным оператором U в $\mathbf{C}^n$. Согласно теореме Нетер, функция

$$(\mathbf{p}, \operatorname{Re}\dot{U}(\mathbf{x} + i\mathbf{p})) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \operatorname{Im}\dot{U}(\mathbf{x} + i\mathbf{p})) - \frac{1}{2}(\operatorname{Re}\dot{U}(\mathbf{x} + i\mathbf{p}), \mathbf{p}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\mathbf{x} + i\mathbf{p}, \dot{U}(\mathbf{x} + i\mathbf{p})),$$

где $\dot{U} = \frac{d}{d\alpha}U(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$, а $U(\alpha)$ — *путь в множестве унитарных операторов* ($U(0) = I$), — первый интеграл уравнений Гамильтона. Множество операторов $\dot{U}$ совпадает с множеством *антисамосопряженных операторов* в $\mathbf{C}^n : (\dot{U})^* = -\dot{U}$. Если $\dot{U}(\mathbf{x} + i\mathbf{p}) = \dot{A}\mathbf{x} + i\dot{A}\mathbf{p}$, то $-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\mathbf{x} + i\mathbf{p}, \dot{U}(\mathbf{x} + i\mathbf{p})) = -(\mathbf{p}, \dot{A}\mathbf{x})$. Это уже известный первый интеграл.

При $n = 1$ оператор $\dot{A}$ тривиален: $\dot{A} = 0$, а оператор $\dot{U}$ имеет вид $\dot{U} = ia$, $a \in \mathbf{R}$. В этом случае

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Im}(x + ip, \dot{U}(x + ip)) = a\frac{1}{2}(x^2 + p^2).$$

Полученный интеграл — энергия. При $n = 2$ с точностью до числового множителя

$$\dot{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий первый интеграл $v_1x_2 - v_2x_1$ известен в механике как координата *момента импульса*. Операторы вида $\dot{U}$ при $n = 2$ образуют четырехмерное вещественное векторное пространство. Базис в нем может быть выбран из операторов

$$i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Им соответствуют интегралы

$$\frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{p}\|^2), \quad \frac{1}{2}(x_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}(x_2^2 + p_2^2), \quad x_1p_2 - p_1x_2, \quad x_1x_2 + p_1p_2.$$

Последний из них специфичен и не допускает стандартной механической интерпретации.

92. Преобразование Лежандра функции, заданной на поверхности. Пусть M — k-мерная поверхность в $\mathbf{R}^n$, $1 \leqslant k < n$, точки которой характеризуются уравнением $g(\mathbf{v}) = 0$, где $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$, $l = n - k$, — гладкое отображение, причем оператор $g'(\mathbf{v})$ не вы-

рожден в каждой точке $\mathbf{v} \in M$. Каждая точка $\mathbf{a} \in M$ обладает окрестностью $U \subset \mathbf{R}^n$, в которой M допускает следующее описание: существуют такая окрестность U_1 нуля в касательном пространстве $M_\mathbf{a}$ и такое гладкое отображение $\varphi: U_1 \to M_\mathbf{a}^\perp$ ($M_\mathbf{a}^\perp$, как обычно, — подпространство в $\mathbf{R}^n$, ортогональное к $M_\mathbf{a}$), что точки $\mathbf{v} \in M \cap U$ характеризуются уравнением $\mathbf{v} = \psi(\xi)$, где $\psi(\xi) = \mathbf{a} + \xi + \varphi(\xi)$, $\xi \in U_1$, причем $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$.

В п. 36 было установлено, что подобное описание поверхности M возможно в некотором цилиндре $\mathbf{v} - \mathbf{a} = \mathbf{y} = \xi + \eta$, где $\xi \in U_1 \subset M_\mathbf{a}$, $\eta \in U_2$, U_2 — окрестность нуля в пространстве $M_a^\perp$. Указанный цилиндр содержит окрестность точки $\mathbf{y} = 0$ в пространстве $M_\mathbf{a} \times M_\mathbf{a}^\perp$. Это следует из оценок

$$\|\xi\|_{M_\mathbf{a}} \leqslant \left(\|\xi\|^2_{M_\mathbf{a}} + \|\eta\|^2_{M_\mathbf{a}^\perp}\right)^{1/2} = \|\xi + \eta\|_{M_\mathbf{a} \times M_\mathbf{a}^\perp},$$

$$\|\eta\|_{M_\mathbf{a}^\perp} \leqslant \|\xi + \eta\|_{M_\mathbf{a} \times M_\mathbf{a}^\perp},$$

которые показывают, что при малой норме $\|\xi + \eta\|_{M_\mathbf{a} \times M_\mathbf{a}^\perp}$ малы нормы координат. Благодаря эквивалентности норм в конечномерных пространствах (п. 29) всякая окрестность в пространстве $M_\mathbf{a} \times M_\mathbf{a}^\perp$ содержит некоторую окрестность в $\mathbf{R}^n$.

Различные отображения g могут задавать одно и то же множество M. Касательное подпространство $M_\mathbf{a}$ и отображение φ не зависят от выбора g. В дальнейшем мы будем иметь дело с самим множеством M и не будем фиксировать отображение g, предполагая, однако, что подходящее g существует.

Напомним, что $k = (n - l)$-мерное подпространство $M_\mathbf{a}$ по определению состоит из векторов ξ, удовлетворяющих уравнению $g'(\mathbf{a})\xi = 0$; l-мерное подпространство $M_\mathbf{a}^\perp$ состоит из векторов η, удовлетворяющих соотношению $(\eta, \xi) = 0$, где $\xi \in M_\mathbf{a}$. Всякий вектор вида $g'^*(\mathbf{a})\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}^l$, принадлежит $M_\mathbf{a}^\perp$:

$$(g'^*(\mathbf{a})\lambda, \xi) = (\lambda, g'(\mathbf{a})\xi) = 0.$$

Произвольный вектор $\eta \in M_\mathbf{a}^\perp$ также может быть представлен в виде $g'^*(\mathbf{a})\lambda$. Это следует из невырожденности $g'(\mathbf{a})$: благодаря невырожденности матрица оператора $g'(\mathbf{a})$ имеет ранг l, такой же ранг имеет транспонированная матрица (матрица оператора $g'^*(\mathbf{a})$), следовательно размерность подпространства векторов вида $\eta = g'^*(\mathbf{a})\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}^l$, равна l и тем самым такие η исчерпывают $M_\mathbf{a}^\perp$.

Будем говорить, что функция $L: M \to \mathbf{R}$ — *гладкая функция* (*на* M), *если при каждом* $\mathbf{a} \in M$ *композиция* $L \circ \psi$ — *гладкая функция на* $U_1 \to \mathbf{R}$, *т. е.* $L \circ \psi \in \mathbf{C}^r$ *при некотором подходящем* r, $r = 1, 2, \ldots$ *Дифференциалом* $d_M L(\mathbf{a}; \xi)$ *функции* L *в точке* $\mathbf{a} \in M$, *отвечающим вектору* $\xi \in M_\mathbf{a}$, *назовем число*

$$d_M L(\mathbf{a}; \xi) = d(L \circ \psi)(0; \xi).$$

Градиентом функции L в точке $\mathbf{a}$ *назовем вектор* $\nabla_M L(\mathbf{a}) \in M_{\mathbf{a}}$, (*однозначно*) *определяемый равенством*

$$d_M L(\mathbf{a};\ \xi) = (\nabla_M L(\mathbf{a}),\ \xi);$$

здесь $(\cdot,\ \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, ограниченное на $M_{\mathbf{a}}$. Если L — ограничение на M гладкой функции, заданной первоначально на $\mathbf{R}^n$, то L — гладкая функция на M, при этом

$$d_M L(\mathbf{a};\ \xi) = dL(\mathbf{a};\ \xi),\ \ \xi \in M_{\mathbf{a}},$$

и $\nabla_M L(\mathbf{a})$ — проекция вектора $\nabla L(\mathbf{a})$ на подпространство $M_{\mathbf{a}}$.

Преобразование Лежандра сопоставляет функцию $H: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *поверхности* M *и функции* $L: M \to \mathbf{R}$. Рассмотрим прежде всего отображение T, заданное формулой

$$\mathbf{p} = T(\mathbf{v},\ \mu) = \nabla_M L(\mathbf{v}) + \mu, \qquad (4)$$

где $\mathbf{v} \in M$, $\mu \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$ (рис. 20). Отметим, что слагаемые справа ортогональны. Если отображение T обратимо, то на множестве его значений можно определить функцию H:

$$H(\mathbf{p}) = -L(\mathbf{v}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v}). \qquad (5)$$

В этом определении $\mathbf{v}$ следует считать выраженным через $\mathbf{p}$.

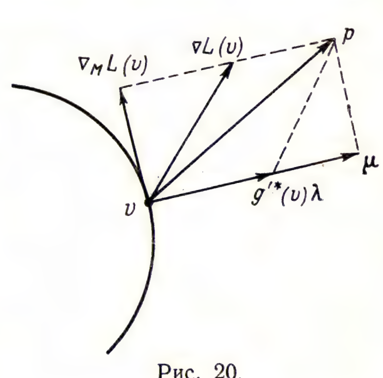


Рис. 20.

Отображение T обратимо лишь в исключительных случаях. Однако оно нередко становится обратимым, если ограничить его на подходящее подмножество аргументов $(\mathbf{v},\ \mu)$.

Пример 1. Пусть

$$M = \{(v_1,\ v_2) : \|\mathbf{v}\| = 1,\ v_1 > 0\}$$

— полуокружность радиуса 1 в $\mathbf{R}^2$. Введем на M в качестве параметра полярный угол φ, отсчитываемый от точки $(1,\ 0)$ в направлении точки $(0,\ 1)$. Рассмотрим на M функцию L, полагая $L(\varphi) = \varphi$. Легко видеть, что

$$\nabla_M L(\varphi) = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

(рис. 21). Множество точек $\mathbf{p} = \nabla_M L(\varphi) + \mu$ при заданном φ — прямая, которая касается окружности $\|\mathbf{v}\| = 1$. Вектор μ имеет вид $\mu = \tau(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$, $\tau \in \mathbf{R}$. Ясно, что отображение T не обратимо. Если ограничить его на множество аргументов $(\varphi,\ \mu)$, которые характеризуются условием $\tau > 0$, то отображение станет обратимым. Его образ (множество значений) ясен из рисунка: он заметается лучами, которые касаются окружности $\|\mathbf{v}\| = 1$ в точках с положительной координатой v_2.

Условимся ради краткости опускать все оговорки относительно областей определения отображения T и функции H. *Зная функ-*

цию H, можно обратить отображение T, восстановить поверхность M и функцию L на ней. Вычислим дифференциал функции H:

$$dH = (-\nabla_M L(\mathbf{v}),\ d\mathbf{v}) + (d\mathbf{p},\ \mathbf{v}) + (\mathbf{p},\ d\mathbf{v}).$$

Здесь $\mathbf{v}$ следует рассматривать как функцию от $\mathbf{p}$, при этом $d\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}$. Воспользуемся определением $\mathbf{p}$, тогда

$$dH = (d\mathbf{p},\ \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\mu},\ d\mathbf{v}) = (d\mathbf{p},\ \mathbf{v}).$$

В последней формуле учтено, что $(\boldsymbol{\mu},\ d\mathbf{v}) = 0$. Итак,

$$\nabla H(\mathbf{p}) = \mathbf{v}. \tag{6}$$

Полученный результат означает, что, зная H, можно обратить T (по $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ немедленно вычисляется $\boldsymbol{\mu}$) и найти поверхность M как множество значений градиента H.

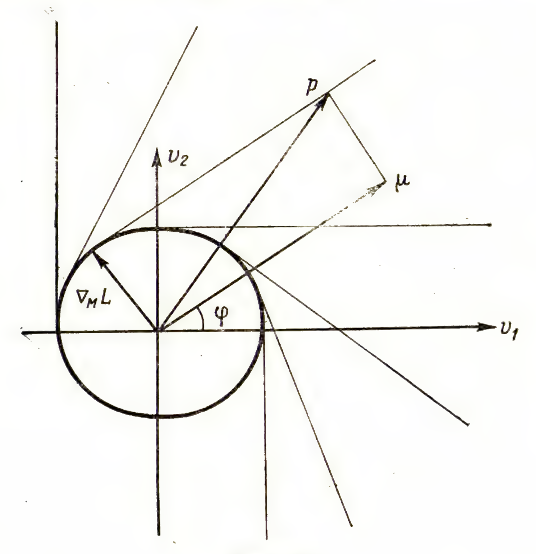


Рис. 21.

Покажем, что функция L также может быть восстановлена по функции H:

$$L(\mathbf{v}) = -H(\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v});$$

из правой части $\mathbf{p}$ следует исключить с помощью соотношения $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$. Согласно определению H

$$-H(\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v}) = -[-L(\mathbf{w}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{w})] + (\mathbf{p},\ \mathbf{v}).$$

Справа $\mathbf{w}$ следует выразить через $\mathbf{p}$ с помощью равенства $\mathbf{p} = \nabla_M L(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\mu}$, а затем $\mathbf{p}$ должно быть исключено с помощью равенства $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$. Сопоставление этих равенств дает $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, поэтому $-H(\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v}) = L(\mathbf{w}) = L(\mathbf{v})$, что и требовалось.

Пример 2. Построим функцию H для рассмотренного выше примера 1:

$$H(\mathbf{p}) = -L(\mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v}) = -\varphi + (\mathbf{p}, (\cos\varphi, \sin\varphi)).$$

Точку $\mathbf{v}$ или, что эквивалентно, угол φ следует исключить с помощью соотношения

$$\mathbf{p} = (-\sin\varphi, \cos\varphi) + \tau(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Отсюда следует, что $(\mathbf{p}, (\cos\varphi, \sin\varphi)) = \tau$, поэтому $H(\mathbf{p}) = -\varphi + \tau$. Предполагая, что $\tau > 0$, выразим φ и τ через $\mathbf{p}$. Имеем $\|\mathbf{p}\|^2 = 1 + \tau_2$, $(\mathbf{p}, (-\sin\varphi, \cos\varphi)) = 1$, откуда $\tau = (\|p\|^2 - 1)^{1/2}$, $\|\mathbf{p}\| \sin(\psi - \varphi) = 1$, где $\psi = \operatorname{arctg} p_2/p_1$ — полярный угол точки p. Окончательно $H(\mathbf{p}) = \arcsin\|\mathbf{p}\|^{-1} - \psi + (\|\mathbf{p}\|^2 - 1)^{1/2}$.

93. Характеристические свойства функции H. Функция H, возникшая в конструкции, которая была описана в предыдущем пункте, обладает следующими свойствами:

1. *Множество значений градиента ∇H совпадает с множеством точек некоторой поверхности M. Иными словами, функция H удовлетворяет дифференциальному уравнению вида*

$$g(\nabla H) = 0, \quad g: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l. \tag{7}$$

2. *Равенство*

$$\nabla H(\mathbf{p}) = \nabla H(\mathbf{p} + \mathbf{v}) \tag{8}$$

возможно тогда и только тогда, когда $\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$, где $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$.

В самом деле, по построению: $\mathbf{p} = T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_M L(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\mu} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$. Но тогда $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \nabla_M L(\mathbf{v}) + (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu} + \mathbf{v})$. Следовательно, векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$, а $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$, соответствует в силу обратимости T одна и та же точка $\mathbf{v}$, поэтому $\nabla H(\mathbf{p}) = \nabla H(\mathbf{p} + \mathbf{v})$. Обратно, если $\nabla H(\mathbf{p}) = \nabla H(\mathbf{p} + \mathbf{v})$, то в силу (6) $\mathbf{p} = T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu})$ и $\mathbf{p} + \mathbf{v} = T(\mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}')$, где $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$ и $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}' \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$. Подробнее: $\mathbf{p} = \nabla_M L(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \nabla_M L(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\mu}'$, так что $\mathbf{v} = \boldsymbol{\mu}' - \boldsymbol{\mu} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$.

3. *Справедливо соотношение*

$$H(\mathbf{p} + \mathbf{v}) = H(\mathbf{p}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}), \tag{9}$$

где $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$, а $\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$.

Действительно, $H(\mathbf{p} + \mathbf{v}) = -L(\mathbf{w}) + (\mathbf{p} + \mathbf{v}, \mathbf{w})$, где $\mathbf{w}$ должно быть выражено через $\mathbf{p}$ с помощью равенства $\mathbf{p} + \mathbf{v} = \nabla_M L(\mathbf{w}) + \boldsymbol{\mu}$. Из последнего равенства следует $\mathbf{w} = \nabla H(\mathbf{p} + \mathbf{v})$. В силу 2 $\mathbf{w} = \nabla H(\mathbf{p}) = \mathbf{v}$, поэтому $\mathbf{p} = \nabla_M L(\mathbf{v}) + \boldsymbol{\mu}$. Следовательно, $H(\mathbf{p} + \mathbf{v}) = -L(\mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{p}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v})$, что и требовалось.

Свойства 1, 2 и 3 не независимы. В частности, из 1 следует 3, иными словами, *всякое решение дифференциального уравнения* (7) *удовлетворяет соотношению* (9). Достаточно доказать этот факт при $l = 1$, т. е. в том случае, когда M — гиперповерхность. Действительно, допустим, что из скалярного дифференциального уравнения $g(\nabla H) = 0$ следует, что

$$H(\mathbf{p} + \mathbf{v}) = H(\mathbf{p}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}), \tag{10}$$

где $\mathbf{v} \in m_{\mathbf{v}}^{\perp}$, $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$, $m_{\mathbf{v}}$ — касательное подпространство к гиперповерхности m с уравнением $g(\mathbf{v}) = 0$. Обращаясь к общему случаю, заметим, что из уравнения $g(\nabla H) = 0$ вытекает скалярное уравнение $\lambda(g(\nabla H)) = 0$, в котором λ — произвольная линейная функция $\mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$. Подпространство $m_{\mathbf{v}}^{\perp}$ для этого уравнения состоит из векторов $(\lambda g'(\mathbf{v}))^* t = g'^*(\mathbf{v}) \lambda^* t$, $t \in \mathbf{R}$. Так как $\lambda^* t \in \mathbf{R}^l$, то подобные векторы образуют одномерное подпространство в $M_{\mathbf{v}}^{\perp}$. Для таких векторов справедливо соотношение (10). Благодаря произвольности λ оно верно для всех $\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$.

Вывод соотношения (10) для скалярного уравнения будет приведен ниже в п. 105.

Из свойств 1 и 3, т. е. в конечном счете из свойства 1, можно извлечь соотношение (8), т. е. достаточность условия $\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$ в свойстве 2. Для этого следует продифференцировать (9) по $\mathbf{p}$ и учесть, что $d\mathbf{v}(\mathbf{p};\ \mathbf{h}) \in M_{\mathbf{v}}$ в силу 1:

$$dH(\mathbf{p}+\mathbf{v};\ \mathbf{h}) = dH(\mathbf{p};\ \mathbf{h}) + (d\mathbf{v}(\mathbf{p};\ \mathbf{h}),\ \mathbf{v}) = dH(\mathbf{p};\ \mathbf{h}),$$

тем самым $\nabla H(\mathbf{p}+\mathbf{v}) = \nabla H(\mathbf{p})$. Необходимость условия в свойстве 2 не зависит от свойств 1 и 3, эта необходимость есть фактически условие некоторой невырожденности отображения $\mathbf{p} \to \nabla H(\mathbf{p})$. В приведенном выше доказательстве необходимость была получена как следствие обратимости отображения T.

Каковы характеристические свойства функции H, возникающей в рассматриваемой конструкции? Если отвлечься от описания области определения и свойств гладкости, то функция H вполне будет характеризоваться двумя свойствами:

1′. *Множество значений градиента ∇H совпадает с множеством точек некоторой поверхности M.*

2′. *Отображение $\mathbf{p} \to \nabla H(\mathbf{p})$ не вырождено в том смысле, что из равенства $\nabla H(\mathbf{p}+\mathbf{v}) = \nabla H(\mathbf{p})$ следует $\mathbf{v} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$, $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$.*

Выше мы видели, что из 1′ и 2′ вытекает 1—3. При восстановлении функции L по функции H была использована процедура исключения $\mathbf{p}$ из выражения $-H(\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v})$ с помощью соотношения $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$. Она *корректна*, т. е. приводит к вполне определенной функции от $\mathbf{v}$, если выполняются 1′ и 2′. В самом деле, соотношение $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$ в силу 2′ определяет $\mathbf{p}$ с точностью до слагаемого $\boldsymbol{\mu} \in M_{\mathbf{v}}^{\perp}$: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\mu}$. Подставим результат в $-H(\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v})$:

$$-H(\mathbf{p}_0+\boldsymbol{\mu}) + (\mathbf{p}_0+\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{v}) = -H(\mathbf{p}_0) - (\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{v}) + (\mathbf{p}_0+\boldsymbol{\mu},\ \mathbf{v}) = -H(\mathbf{p}_0) + (\mathbf{p}_0,\ \mathbf{v}).$$

Проведенное вычисление (в нем было использовано свойство 3 — следствия 1′ и 2′) показывает, что процедура, которую мы обсуждаем, действительно корректна.

Отправляясь от функции H, удовлетворяющей условиям 1′ и 2′, построим функцию $L : L(\mathbf{v}) = -H(\mathbf{p}) + (\mathbf{p},\ \mathbf{v})$, $\mathbf{v} = \nabla H(\mathbf{p})$. Несложно проверить, что H — преобразование Лежандра функ-

ции L, заданной на M. Поэтому 1′ и 2′ — характеристические свойства функции H.

Преобразование Лежандра функции $L: M \to \mathbf{R}$ может быть описано несколько иначе, если функция L первоначально задана на $\mathbf{R}^n$, а затем ограничена на M. Будем считать, кроме того, что фиксировано отображение g, характеризующее M. Исходным при построении преобразования Лежандра является отображение

$$(\mathbf{v}, \lambda) \to \mathbf{p} = \nabla L(\mathbf{v}) + g'^*(\mathbf{v})\lambda, \tag{11}$$

$\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}^l$. Векторы $\nabla_M L(\mathbf{v}) + \mu$ и $\nabla L(\mathbf{v}) + g'^*(\mathbf{v})\lambda$ совпадают, если $\mu = \nabla_\perp L(\mathbf{v}) + g'^*(\mathbf{v})\lambda$, где $\nabla_\perp L(\mathbf{v})$ — проекция $\nabla L(\mathbf{v})$ на $M_\mathbf{v}^\perp$. Введем функцию

$$H(\mathbf{p}) = -L(\mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v}),$$

исключая из правой стороны $\mathbf{v}$ с помощью равенства $\mathbf{p} = \nabla L(\mathbf{v}) + g'^*(\mathbf{v})\lambda$. Это равенство определяет ту же точку $\mathbf{v}$, что и равенство $\mathbf{p} = \nabla_M L(\mathbf{v}) + \mu$, поэтому построенная функция совпадает с функцией H, введенной в п. 92.

В заключение укажем условия локальной обратимости отображения (11). Для этого целесообразно распространить указанное отображение на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l$, дополнив его условием $g(\mathbf{v}) = 0$ Если отображение

$$(\mathbf{v}, \lambda) \to (\nabla L(\mathbf{v}) + g'^*(\mathbf{v})\lambda,\ g(\mathbf{v})) \tag{12}$$

обратимо в некоторой окрестности точки $(\mathbf{v}, \lambda) \in M \times \mathbf{R}^l$, то в некоторой окрестности этой же точки обратимо отображение (11). Производная отображения (12) в точке $(\mathbf{v}, \lambda)$ — оператор $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l$. Матрица этого оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \left\{L_{v_i v_j}(\mathbf{v}) + \sum_{m=1}^{l} \lambda_m g_{m v_i v_j}(\mathbf{v})\right\} & \left\{g_{j v_i}(\mathbf{v})\right\} \\ \left\{g_{i v_j}(\mathbf{v})\right\} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если она обратима, то согласно теореме об обратной функции в некоторой окрестности точки $(\mathbf{v}, \lambda)$ обратимо отображение (12) и, следовательно, отображение (11). Выписанная блочная матрица заведомо обратима, если

$$\det \left\{L_{v_i v_j}(\mathbf{v}) + \sum_{m=1}^{l} \lambda_m g_{m v_i v_j}(\mathbf{v})\right\} \neq 0$$

и $\left\{g_{i v_j}(\mathbf{v})\right\}$ — матрица ранга l (см. лемму п. 79)

94. Уравнения Гамильтона для задачи Лагранжа. Задача Лагранжа, которая была изучена в § 2 гл. II, состоит в отыскании точек экстремума функционала

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt,$$

ограниченного на множество $M \subset C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, точки $\mathbf{f}$ которого выделены условием

$$F(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = 0,$$

F — заданная функция $\Delta\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^l$, $l<n$. Точки экстремума удовлетворяют соотношениям

$$L_\lambda[\mathbf{f}]=0,\quad F(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')=0, \tag{13}$$

при этом $L_\lambda(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})=L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})+(\boldsymbol{\lambda}(t),\ F(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}))$ и $\boldsymbol{\lambda}$ — подходящая функция $\Delta\to\mathbf{R}^l$. Выписанная система используется как для отыскания $\mathbf{f}$, так и для отыскания $\boldsymbol{\lambda}$. Так же как и уравнение Эйлера, она эквивалентна некоторой системе канонических уравнений.

Рассмотрим функцию L как функцию от третьего аргумента $\mathbf{v}$, считая t и $\mathbf{x}$ фиксированными. Ограничим ее на $(n-l)$-мерную поверхность $M_{t,\mathbf{x}}$, точки которой удовлетворяют уравнению $F(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})=0$. Построим функцию $H(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})$ — преобразование Лежандра функции $L(t,\ \mathbf{x},\ \cdot)$, ограниченной на $M_{t,\mathbf{x}}$. *Система канонических уравнений*

$$\mathbf{f}'=\nabla_{\mathbf{p}}H(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g}),\quad \mathbf{g}'=-\nabla_{\mathbf{x}}H(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{g})$$

эквивалентна системе (13).

Первое из уравнений канонической системы согласно свойствам преобразования Лежандра означает, что $F(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')=0$. Кроме того, из этого уравнения следует

$$\mathbf{g}(t)=\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')+(F_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}'))^*\,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t),$$

где $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ — некоторая функция $\Delta\to\mathbf{R}^l$. Введем отвечающую ей функцию $L_\lambda(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})=L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})+(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t),\ F(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}))$. Тогда

$$\mathbf{g}=\nabla_{\mathbf{v}}L_\lambda(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}').$$

Вычислим градиент $\nabla_{\mathbf{x}}H(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})$. Используем определение H:

$$H_{x_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})=-L_{x_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})-L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})\,\mathbf{v}_{x_i}+\sum\nolimits_{j=1}^n p_j v_{jx_i}=$$
$$=-L_{x_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})+\sum\nolimits_{j=1,\ m=1}^{n\quad l}F_{mv_j}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})\,\lambda_m v_{jx_i}.$$

Векторы $\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ определяются вектором $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}=\nabla_{\mathbf{v}}L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})+(F_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}))^*\,\boldsymbol{\lambda},$$

и при фиксированных t и $\mathbf{p}$ зависят от $\mathbf{x}$. Именно эта зависимость и подразумевается в приведенной выкладке. Так как $F(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})=0$, то

$$F_{mx_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})+\sum\nolimits_{j=1}^n F_{mv_j}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})\,v_{jx_i}=0,$$

поэтому

$$H_{x_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})=-L_{x_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})-\sum\nolimits_{m=1}^l \lambda_m F_{mx_i}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$$

или

$$\nabla_{\mathbf{x}}H(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})=-\nabla_{\mathbf{x}}L_\lambda(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}).$$

Учтем, что при $\mathbf{x}=\mathbf{f}(t)$ и $\mathbf{p}=\mathbf{g}(t)$ справедливы соотношения $\mathbf{v}=\mathbf{f}'(t)$ и $\boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(t)$. Это замечание и только что доказанная фор-

мула позволяют придать второму уравнению канонической системы следующий вид:

$$\mathbf{g}' = \nabla_{\mathbf{x}} L_\lambda (t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'),$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L_\lambda (t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = \nabla_{\mathbf{x}} L_\lambda (t, \mathbf{f}, \mathbf{f}'), \text{ т. е. } L_\lambda [\mathbf{f}] = 0.$$

Рассуждения, которые привели от канонической системы к системе (13), обратимы. Итак, каноническая система действительно эквивалентна системе (13).

В изложенных построениях предполагалось, что связи *неголономны*. Если связи голономны (или частично голономны), то их следует заменить неголономными, продифференцировав полным образом по t. От связи $\tilde{F}(t, \mathbf{f}(t)) = 0$ следует перейти к связи

$$F(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = \tilde{F}_t (t, \mathbf{f}(t)) + \tilde{F}_{\mathbf{x}} (t, \mathbf{f}(t)) \; \mathbf{f}'(t) = 0.$$

При этом вектор-функция $\tilde{F}$ окажется первым интегралом канонической системы

$$\tilde{F}_t (t, \mathbf{f}(t)) + \tilde{F}_{\mathbf{x}} (t, \mathbf{f}(t)) \quad \nabla_{\mathbf{p}} H (t, \mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0.$$

Последнее соотношение выполняется, ибо, как установлено выше, $F(t, \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{p}} H (t, \mathbf{x}, \mathbf{p})) = 0$.

Пример. Пусть функция L обладает свойством однородности

$$L(t, \mathbf{x}, k\mathbf{v}) = |k| \, L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \qquad k \in \mathbf{R}.$$

Дополним уравнение $L[\mathbf{f}] = 0$ связью $L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 1$ (см. по этому поводу п. 76). Уравнение $L_\lambda [\mathbf{f}] = 0$ имеет вид

$$(1+\lambda) L[\mathbf{f}] - \nabla_{\mathbf{v}} L (t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') \frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

В п. 73 было показано, что $(L[\mathbf{f}](t), \mathbf{f}'(t)) = 0$ и $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{v}} L (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))$, поэтому $L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') \frac{d\lambda}{dt} = 0$, откуда $\frac{d\lambda}{dt} = 0$. Это значит, что уравнение $L_\lambda [\mathbf{f}] = 0$ совпадает с уравнением $(1+\lambda) L[\mathbf{f}] = 0$. Таким образом, при $\lambda \neq -1$ система

$$L[\mathbf{f}] = 0, \qquad L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 1$$

эквивалентна системе

$$L_\lambda [\mathbf{f}] = 0, \qquad L(t, \mathbf{f}, \mathbf{f}') = 1.$$

Для перехода от последней системы к канонической выполним преобразование Лежандра функции $L_\lambda (t, \mathbf{x}, \cdot)$, ограниченной на гиперповерхность $M_{t, \mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$, состоящую из точек, удовлетворящих уравнению $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = 1$. Рассмотрим преобразование

$$(\mathbf{v}, \lambda) \to \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{v}} L (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \lambda \nabla_{\mathbf{v}} L (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} L (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) (1+\lambda).$$

Допустим, что это преобразование обратимо. Так как $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = (1+\lambda) \times$ $\times (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{v}} L (t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = (1+\lambda) L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = 1 + \lambda$, то

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \lambda.$$

При обращении отображения $(\mathbf{v}, \lambda) \to \mathbf{p}$ число λ оказывается функцией от $t, \mathbf{x}, \mathbf{p}$.

Если $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (A(t, \mathbf{x})\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$, то $\mathbf{p} = (A(t, \mathbf{x})\mathbf{v})(1+\lambda)$. Следовательно, $(A^{-1}(t, \mathbf{x})\mathbf{p}, \mathbf{p}) = (1+\lambda)^2$, так что $\lambda = -1 + (A^{-1}(t, \mathbf{x})\mathbf{p}, \mathbf{p})^{1/2}$ и $\mathbf{v} = (A^{-1}(t, \mathbf{x})\mathbf{p}, \mathbf{p})^{-1/2} A^{-1}(t, \mathbf{x})\mathbf{p}$.

В связи с рассмотренным примером следует обратить внимание на тот факт, что сама функция $L(t, \mathbf{x}, \cdot)$, до ограничения на поверхность $M_{t, \mathbf{x}}$, не допускает преобразования Лежандра, ибо отображение $\mathbf{v} \to \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ — однородное отображение степени 0: $\nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, k\mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \operatorname{sign} k$. Эквивалентный, но по форме другой подход к каноническим уравнениям для однородной функции L будет изложен в § 2.

95. Новая версия преобразования Лежандра и уравнений Гамильтона. Дадим новую версию преобразования Лежандра для функций на $\mathbf{R}^n$, которую можно перенести на отображения $F: E \to \mathbf{R}$, *E — нормированное пространство. В этой версии* вместо отображения $\nabla F: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ рассматривается отображение $F': \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$, а *функция $G: \mathbf{L}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$, преобразование Лежандра функции F, определяется формулой*

$$G(\mathbf{p}) = p(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} = (F')^{-1}(p). \tag{14}$$

Так введенное преобразование Лежандра по-прежнему остается инволюцией. Это утверждение подразумевает прежде всего, что $\mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n)) = \mathbf{R}^n$. Конечно, подобное равенство надо понимать не буквально; оно означает, что *существует стандартное отображение $k: \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$, которое является изоморфизмом пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$ как нормированных пространств*, т. е. отображение k дистрибутивно, сохраняет норму $\|k\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ и $\operatorname{Im} k = \mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$. Обратимость отображения k, которую следовало бы включить в описание изоморфизма, является следствием формулы $\|k\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$. Действительно, если $k(\mathbf{v}_1) = k(\mathbf{v}_2)$, то $k(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = 0$ и, следовательно, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, что и означает обратимость k. *Благодаря существованию стандартного изоморфизма пространств $\mathbf{R}^n$ и $L(L(\mathbf{R}^n))$, рассматриваемых как нормированные пространства, можно условиться не различать векторы $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ и $k\mathbf{v}$.*

Существование изоморфизма пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$ следует из того, что изоморфны пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$. Изоморфизм $j: \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$ можно задать формулой

$$j\mathbf{g} = l, \qquad l(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{g}).$$

Ясно, что отображение j дистрибутивно, удовлетворяет соотношению $\|j\mathbf{g}\| = \|\mathbf{g}\|$ (см. п. 44) и $\operatorname{Im} j = \mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$. Стандартность изоморфизма k заключается в том, что он не зависит от евклидовой структуры на $\mathbf{R}^n$ и может быть описан без ее привлечения.

Зададим отображение $k: \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$ формулой $(k(\mathbf{v}))(p) = p(\mathbf{v})$, где $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$. Отображение k дистрибутивно:

$$(k(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2))(p) = p(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 p(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 p(\mathbf{v}_2) = (\alpha_1 k(\mathbf{v}_1) + \alpha_2 k(\mathbf{v}_2))(p).$$

Заметим далее, что $\sup\limits_{\|p\|\leqslant 1} \|p(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. В самом деле, с одной стороны, $\sup\limits_{\|p\|\leqslant 1} \|p(\mathbf{v})\| \leqslant \sup\limits_{\|p\|\leqslant 1} \|p\|\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, с другой стороны, $p(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|$ при $p = j\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} : j\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{v},\ \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{v}\|$. Изоморфизм $j: \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$ привлечен здесь лишь в качестве удобного средства доказательства. Отсюда следует, что $\|k(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$: согласно определению $\|k(\mathbf{v})\| = \sup\limits_{\|p\|\leqslant 1} \|k(\mathbf{v})(p)\|$, значит, $\|k(\mathbf{v})\| = \sup\limits_{\|p\|\leqslant 1} \|p(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. Остается проверить, что $\operatorname{Im} k = \mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$. Пусть $l \in \mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$, запишем l в виде ljj^{-1}, вновь привлекая изоморфизм j. Но отображение $lj: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — элемент $\mathbf{L}(\mathbf{R}^n)$ — всегда можно представить в виде $j\mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$. Поэтому $l = ljj^{-1} = (j\mathbf{v})j^{-1}$. Вычислим $l(p): l(p) = ((j\mathbf{v})j^{-1})(p) = (j\mathbf{v})(j^{-1}p) = (\mathbf{v},\ j^{-1}p) = (j^{-1}p,\ \mathbf{v}) = (jj^{-1}p)(\mathbf{v}) = p(\mathbf{v})$. Итак, действительно, k — изоморфизм пространств $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$.

После отождествления $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{L}(\mathbf{L}(\mathbf{R}^n))$ преобразование Лежандра $H: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ функции $G: \mathbf{L}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$, которое дается формулой

$$H(w) = w(p) - G(p), \qquad p = (G')^{-1}(w),$$

будет совпадать с функцией F. Вообще все свойства преобразования Лежандра с той поправкой, что в новой версии оно связывает функции на $\mathbf{R}^n$ и на $L(\mathbf{R}^n)$, сохраняются.

Функция Гамильтона $H(t,\ \mathbf{x},\ p)$ определяется теперь как отображение $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{L}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$. *Уравнениями Гамильтона называют систему дифференциальных уравнений*

$$\mathbf{f}'(t) = H_p(t,\ \mathbf{f},\ g), \qquad g'(t) = -H_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f},\ g).$$

Если функции $H(t,\ \mathbf{x},\ p)$ и $L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})$ двойственны по Юнгу относительно последнего аргумента, то эта система эквивалентна уравнению Эйлера

$$L_{\mathbf{x}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}') - \frac{d}{dt} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}') = 0.$$

При установлении эквивалентности функции $\mathbf{f}$ сопоставляется пара $(\mathbf{f},\ g)$, где $g(t) = L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{f},\ \mathbf{f}')$. Уравнения Гамильтона совпадают с уравнением Эйлера для функционала

$$J(\mathbf{f},\ g) = \int_\Delta [g(t)(\mathbf{f}'(t)) - H(t,\ \mathbf{f}(t),\ g(t))]\, dt.$$

Отображение k сохраняет смысл для любого нормированного пространства E. Оно действует из E в $\mathbf{L}(\mathbf{L}(E))$ и определяется формулой

$$(k(\mathbf{v}))(p) = p(\mathbf{v}).$$

Легко видеть, что k — дистрибутивное отображение, можно показать также, что оно не меняет норму: $\|k(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. Не всегда, однако, $\operatorname{Im} k = \mathbf{L}(\mathbf{L}(E))$. В общем случае $\operatorname{Im} k$ — лишь некоторое подпространство пространства $\mathbf{L}(\mathbf{L}(E))$, обозначим его E_k. Подпространство E_k изоморфно пространству E и может быть отож-

дествлено с ним. Преобразование Лежандра $G:\mathbf{L}(E)\to\mathbf{R}$ функционала $F:E\to\mathbf{R}$ определяется прежней формулой (14). Значения отображения $G':\mathbf{L}(E)\to\mathbf{L}(\mathbf{L}(E))$ принадлежат E_k, а после отождествления E_k и E выясняется, что преобразование Лежандра — инволюция. Подчеркнем, что равноправие функционалов F и G в этом построении несколько нарушается: если построение начинается с функционала $G:\mathbf{L}(E)\to\mathbf{R}$, следует предполагать, что значения отображения G' принадлежат E_k. С этой оговоркой преобразование Лежандра можно рассматривать на любом нормированном пространстве E. Для произвольного E сохраняет смысл и все, что сказано о связи уравнения Эйлера с уравнениями Гамильтона.

Эквивалентность уравнения Эйлера и уравнений Гамильтона позволяет характеризовать механическую систему не функцией Лагранжа, а функцией Гамильтона. Во многих случаях и первоначальное описание механической системы удобно давать в терминах функции Гамильтона.

Гамильтоновой механической системой называется пара (E, H), *где* E — *нормированное пространство, а* H — *функционал на* $\mathbf{R}\times E\times\times\mathbf{L}(E)$. Предполагается, что производная функционала H по последней компоненте аргумента принадлежит пространству E_k. Пространство E по-прежнему называют *конфигурационным*, пространство $E\times\mathbf{L}(E)$ — *фазовым*, а функционал H — *функцией Гамильтона, или гамильтонианом*. Первый аргумент функционала H называют *временем*, первую компоненту пары $(u, p)\in E\times L(E)$ — *конфигурацией*, а вторую — *импульсом* системы. Функционал

$$\int_\Delta [g(t)(f'(t)) - H(t, f(t), g(t))]\,dt,$$

заданный на отображениях вида $(f, g):\Delta\to\mathbf{E}\times\mathbf{L}(E)$, называется *действием системы на интервале* Δ. Уравнение Эйлера для него

$$f'(t) = H_p(t, f, g), \qquad g'(t) = -H_u(t, f, g)$$

называется *уравнением движения*, или *системой уравнений Гамильтона*. Такая гамильтонова система эквивалентна лагранжевой системе, функция Лагранжа L которой получается из H преобразованием Лежандра по последнему аргументу (если такое преобразование существует).

Понятие гамильтоновой механической системы допускает обобщение, после которого оно приобретает некоторые преимущества перед понятием лагранжевой системы. *Обобщенной гамильтоновой механической системой называется тройка* (F, Λ, H), *где* F — *нормированное пространство*, Λ — оператор $F\to\mathbf{L}(F)$, а H — отображение $\mathbf{R}\times F\to\mathbf{R}$. Предполагается, что оператор Λ обратим и *антисимметричен*: $(\Lambda(x))(y) = -(\Lambda(y))(x)$. Пространство F называется *фазовым*, функционал H — *функцией Гамильтона, или гамильтонианом*. Функционал

$$-\int_\Delta \left[\frac{1}{2}(\Lambda(\xi(t)))(\xi'(t)) + H(t, \xi(t))\right]dt,$$

заданный на отображениях $\xi : \Delta \to F$, называется *действием системы на интервале* Δ. Уравнение Эйлера для него имеет вид

$$\Lambda\xi'(t) = H_x(t, \xi(t)),$$

оно называется *уравнением движения*. Определенная выше гамильтонова система является частным случаем обобщенной гамильтоновой системы, уравнения Гамильтона можно записать в виде

$$\Lambda(f', g') = (H_u, H_p),$$

где Λ — оператор $F = E \times \mathbf{L}(E) \to \mathbf{L}(E) \times E_k \subset \mathbf{L}(E) \times \mathbf{L}(\mathbf{L}(E)) = \mathbf{L}(F)$, действующий по формуле $\Lambda(u, p) = (-p, u)$. Действие для обобщенной гамильтоновой системы $(E \times \mathbf{L}(E), \Lambda, H)$ отличается от действия для системы (E, H), полной производной под знаком интеграла, присутствие которой не сказывается на уравнении Эйлера

$$\frac{1}{2}(\Lambda(f, g))(f', g') = \frac{1}{2}(-g, f)(f', g') = -\frac{1}{2}g(f') + \frac{1}{2}g'(f) =$$
$$= -g(f') + \frac{1}{2}g(f') + \frac{1}{2}g'(f) = -g(f') + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g(f).$$

96. Уравнения Гамильтона для локальных полей. Если E — евклидово пространство, то для него с некоторыми оговорками можно дать обобщение первоначальной версии преобразования Лежандра, изложенной в п. 88, преимущество которой состоит в том, что она не использует пространства $\mathbf{L}(E)$. В п. 35 было введено понятие *вариационной производной* функционала на пространствах функций. Это понятие также позволяет избежать использования пространства $\mathbf{L}(E)$. Кратко изложим формульную сторону преобразования Лежандра, используя вариационную производную.

Пусть на $D \times \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^k$, задана достаточно гладкая функция $\mathcal{F}(x, w)$. На некотором множестве непрерывных функций $D \to \mathbf{R}$ рассмотрим функционал

$$F(\psi) = \int_D \mathcal{F}(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

Его вариация дается формулой

$$\delta F(\psi; h) = \int_D \mathcal{F}_w(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))\,h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \left(\frac{\delta F}{\delta\psi}, h\right)_{H(D)},$$

в которой $\frac{\delta F}{\delta\psi}$ — *вариационная производная* функционала F. Рассмотрим отображение

$$\psi \to \frac{\delta F}{\delta\psi}.$$

Будем считать, что оно обратимо, и введем на множестве его значений функционал

$$G(\pi) = (\psi, \pi)_H - F(\psi) = \int_D [\psi(\mathbf{x})\,\pi(\mathbf{x}) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x}))]\,d\mathbf{x}.$$

Из правой части функция ψ должна быть исключена с помощью соотношения

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{\delta F}{\delta \psi(\mathbf{x})} = \mathcal{F}_w(\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})).$$

Описанное отображение $F \to G$, как и выше, *называется преобразованием Лежандра.* Видно, что функционал G может быть задан формулой

$$G(\pi) = \int_D \mathcal{G}(\mathbf{x}, \pi(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x},$$

где

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, p) = pw - \mathcal{F}(\mathbf{x}, w), \qquad p = \mathcal{F}_w(\mathbf{x}, w).$$

Таким образом, преобразование Лежандра функционала F сводится к преобразованию Лежандра функции $w \to \mathcal{F}(\mathbf{x}, w)$ при фиксированном $\mathbf{x}$. Отсюда следует, что *преобразование Лежандра инволютивно.* Так как функция $p \to \mathcal{G}_p(\mathbf{x}, p)$ обратна к функции $w \to \mathcal{F}_w(\mathbf{x}, w)$, то ясно, что отображение $\pi \to \frac{\delta G}{\delta \pi}, \frac{\delta G}{\delta \pi(x)} = \mathcal{G}_p(\mathbf{x}, \pi(\mathbf{x}))$, обратно к отображению $\psi \to \frac{\delta F}{\delta \psi}$. Функционалы, связанные преобразованием Лежандра, называются двойственными по Юнгу.

Пример 1. Пусть $\mathcal{F}(\mathbf{x}, w) = \frac{1}{2} a(\mathbf{x}) w^2$, $a(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда $\mathcal{G}(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} a^{-1}(\mathbf{x}) p^2$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x}, w) = \mathcal{G}(\mathbf{x}, p)$ при $p = a(\mathbf{x}) w$. Таким образом, $F(\psi) = G(\pi)$ при $\pi(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathcal{L}(t, \mathbf{x}, u, v, \mathbf{w})$ — гладкая функция на $\mathbf{R} \times \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$, — *плотность функции Лагранжа локального поля* и

$$L(t, u, v) = \int_\Omega \mathcal{L}(t, \mathbf{x}, u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$$

— функция Лагранжа. Напомним уравнение Эйлера — Остроградского

$$\frac{\delta L(t, f(t), f'(t))}{\delta u} - \frac{d}{dt} \frac{\delta L(t, f(t), f'(t))}{\delta v} = 0.$$

Пусть $\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u, p, \mathbf{w})$ — гладкая функция на $\mathbf{R} \times \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$. Введем функционал

$$H(t, u, p) = \int_\Omega \mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

Уравнениями Гамильтона, или каноническими уравнениями, называются уравнения вида

$$f'(t) = \frac{\delta H(t, f(t), g(t))}{\delta p}, \quad g'(t) = -\frac{\delta H(t, f(t), g(t))}{\delta u}.$$

Если функции Лагранжа и Гамильтона двойственны по Юнгу относительно последней координаты аргумента, то уравнение Эйлера и уравнения Гамильтона эквивалентны. Эта эквивалентность устанавливается повторением рассуждений из п. 89. Как и для конечного числа степеней свободы, не зависящий от времени функционал Гамильтона является первым интегралом уравнений

Гамильтона. Запишем уравнения Гамильтона, раскрывая явный вид вариационных производных

$$\frac{\partial f(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathcal{H}_p(t, \mathbf{x}, f(t, \mathbf{x}), g(t, \mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{x}} f(t, \mathbf{x})),$$

$$\frac{\partial g(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\mathcal{H}_u(t, \mathbf{x}, f, g, \nabla_{\mathbf{x}} f) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{H}_{w_i}(t, \mathbf{x}, f, g, \nabla_{\mathbf{x}} f).$$

Таким образом, *уравнения Гамильтона для локального* поля, как и уравнение Эйлера, — *уравнения в частных производных*.

Пример 2. Выпишем уравнения Гамильтона для функции Лагранжа, рассмотренной в п. 50:

$$\int_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} (\nabla u)^2 - U(u)\right].$$

Напомним уравнение Эйлера

$$\Delta f(t, \mathbf{x}) - f_{tt} = U'(f).$$

Плотность функции Гамильтона вычисляется с помощью формул предыдущего примера

$$\mathcal{H}(t, \mathbf{x}, u, p, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} w^2 + U(u).$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = g(t, \mathbf{x}), \quad \frac{\partial g(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \Delta f(t, \mathbf{x}) - U'(f(t, \mathbf{x})).$$

Эквивалентность уравнения Эйлера и уравнений Гамильтона видна непосредственно.

§ 2. Поля экстремалей

А. ТЕОРИЯ ПОЛЕЙ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

97. О дифференциальных формах. Условимся о терминах и напомним ряд фактов, известных из начал анализа. Пусть D — *область в* $\mathbf{R}^m$. *Назовем дифференциальной формой (короче — формой) на* D *и обозначим через* Ω *отображение* $D \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, *линейное по второму аргументу*. Обозначим точку области D через α, а второй аргумент Ω, точку пространства $\mathbf{R}^m$, — через $d\alpha$. Координаты вектора $d\alpha$ обозначим $d\alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$. Общий вид формы Ω таков:

$$\Omega(\alpha, d\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \Omega_i(\alpha)\, d\alpha_i,$$

где $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$ — функции $D \to \mathbf{R}$.

Пусть C — область в $\mathbf{R}^l$ и Φ — отображение $C \to D$. Через $\Phi^*\Omega$ обозначим форму

$$(\beta, d\beta) \to \sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \Omega_i(\Phi(\beta)) \frac{\partial \Phi_i(\beta)}{\partial \beta_j}\right) d\beta_j$$

на C. *Переход от формы* Ω *к форме* $\Phi^*\Omega$ *назовем заменой переменных*.

Для формы Ω *на* D *и ориентированной кривой* γ *в* D *определено вещественное число* $\int_\gamma \Omega$, *(криволинейный) интеграл от формы* Ω *по кривой* γ. *Если* $\zeta : [a, b] \to D$ — *параметризация* γ, *то по определению*

$$\int_\gamma \Omega = \int_\Delta (\zeta^* \Omega) = \int_\Delta \sum_{i=1}^m \Omega_i (\zeta(t)) \frac{d\zeta_i(t)}{dt} dt.$$

Интеграл не зависит от выбора параметризации кривой.

Форма Ω *называется замкнутой, если функции* Ω_i *удовлетворяют соотношениям*

$$\frac{\partial \Omega_i(\alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Omega_j(\alpha)}{\partial \alpha_i}, \quad i, \ j = 1, \ \dots, \ m. \tag{1}$$

Функция $S : D \to \mathbf{R}$ *называется первообразной формы* Ω, *если выполняется соотношение*

$$dS(\alpha; \ d\alpha) = \Omega(\alpha, \ d\alpha), \ \alpha \in D, \ d\alpha \in \mathbf{R}^m.$$

Форма, обладающая первообразной, замкнута. В этом случае $\Omega_i = S_{\alpha_i}$ и соотношения (1) очевидны. *Форма* Ω *замкнута тогда и только тогда, когда каждая точка области* D *обладает окрестностью, на которой форма* Ω *имеет первообразную.*

Область D *называется односвязной, если любые две кривые в* D *с одинаковыми граничными точками могут быть непрерывной деформацией, не выводящей из* D, *переведены друг в друга. Форма* Ω *на односвязной области замкнута тогда и только тогда, когда* Ω *имеет первообразную.*

Если форма Ω *замкнута, то форма* $\Phi^* \Omega$, *полученная заменой переменных, также замкнута. В самом деле, если форма* Ω *замкнута, то*

$$\sum_{k, \ l=1}^m \frac{\partial \Omega_k(\Phi)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \beta_i} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta_j} = \sum_{k, \ l=1}^m \frac{\partial \Omega_k(\Phi)}{\partial \alpha_l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \beta_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta_i},$$

что равносильно соотношениям

$$\sum_k \frac{\partial \Omega_k(\Phi)}{\partial \beta_i} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \beta_j} = \sum_k \frac{\partial \Omega_k(\Phi)}{\partial \beta_j} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta_i}$$

и, следовательно, соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \sum_k \Omega_k(\Phi) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \sum_k \Omega_k(\Phi) \frac{\partial \Phi_k}{\partial \beta_i},$$

выражающим замкнутость формы $\Phi^* \Omega$.

Если форма Ω *имеет на* D *первообразную* S, *то интеграл* $\int_\gamma \Omega$ *зависит только от начала* α_1 *и конца* α_2 *кривой* γ, *причем справедливо равенство*

$$S(\alpha_2) - S(\alpha_1) = \int_\gamma \Omega.$$

Интеграл по γ в этом случае обозначают $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Omega$.

98. Поле экстремалей. Исходным объектом является интегральный функционал

$$I(\gamma)=\int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t))\,dt,$$

аргументом которого служит пара $\gamma=\{\Delta,\ \mathbf{f}\}$, где Δ — замкнутый интервал, а $\mathbf{f}$ — вектор-функция $\Delta\to\mathbf{R}^n$. *Экстремалью* функционала I в этом параграфе будет называться такая пара $\gamma=\{\Delta,\mathbf{f}\}$, где Δ — открытый интервал, а $\mathbf{f}$ — определенное на нем решение уравнения Эйлера $L[\mathbf{f}]=0$. Обратим внимание на то, что на этот раз в аргументе функционала интервал Δ считается замкнутым, а в паре, которую мы назвали экстремалью, — открытым.

Пусть D_1 — область в $\mathbf{R}^{n+1}$. Рассмотрим отображение $\tilde{\Phi}: D_1\to\mathbf{R}^n$, $\tilde{\Phi}=(\tilde{\Phi}_1,\ \ldots,\ \tilde{\Phi}_n)$. Геометрически отображению $\tilde{\Phi}$ соответствует $(n+1)$-мерная поверхность $\tilde{M}$ в пространстве $\mathbf{R}^{2n+1}$ точек $(\xi,\ \mathbf{v})$, $\xi\in\mathbf{R}^{n+1}$, $\mathbf{v}\in\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{v}=\tilde{\Phi}(\xi),\ \ \xi\in D_1.$$

Задание $\tilde{\Phi}$ равносильно заданию множества $\tilde{E}$ пар $\gamma=\{\Delta,\mathbf{f}\}$, $\Delta=(a,\ b)$ — интервал, $\mathbf{f}$ — функция $\Delta\to\mathbf{R}^n$, выстилающих область D_1.

Говорят, что *множество $\tilde{E}$ выстилает D_1, если:*

1) *через каждую точку $\xi=(t,\ \mathbf{x})$ области D_1 проходит график пары $\{\Delta,\ \mathbf{f}\}$ множества $\tilde{E}:\mathbf{x}=\mathbf{f}(t)$, $t\in\Delta$, и притом единственной;*

2) *отображение $\tilde{\Phi}: D_1\to\mathbf{R}^n$, определенное формулой*

$$\tilde{\Phi}(\xi)=\mathbf{f}'(t),\tag{2}$$

где $\{\Delta,\ \mathbf{f}\}$ — пара, график которой проходит через точку $\xi=(t,\mathbf{x})$ является гладким.

Из определения можно заключить, что *граничные точки графиков пар множества $\tilde{E}$ не могут быть внутренними точками области D_1, так что графики не прерываются внутри D_1.*

Формула (2), устанавливающая связь между множеством $\tilde{E}$ и отображением $\tilde{\Phi}$, показывает, как определить $\tilde{\Phi}$ по заданному множеству $\tilde{E}$. Чтобы восстановить множество $\tilde{E}$ по $\tilde{\Phi}$, надо решить дифференциальное уравнение

$$\mathbf{f}'(t)=\tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t)).$$

Через каждую точку области D_1 проходит график единственного решения этого уравнения. Рассматривая каждое решение на *максимальном интервале*, где оно может быть определено, получим множество $\tilde{E}$, выстилающее D_1 (см. теорему о выстилании — теорема 3 Приложения 1). *Отображение $\tilde{\Phi}$ по отношению к множеству $\tilde{E}$ называется* ***функцией наклона.***

Напомним, что функции $L: \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$, определяющей функционал I, были сопоставлены функции $\hat{H}: \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$ и $\hat{p}: \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}^n$:

$$\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

$$\hat{H}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = -L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + (\hat{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{v}), \ t \in \mathbf{R}, \ \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n.$$

Пусть задано отображение $\tilde{\Phi}$. Введем на D_1 функции $H^{\Phi}: D_1 \to \mathbf{R}$ и $p^{\Phi}: D_1 \to \mathbf{R}^n$:

$$H^{\Phi}(\xi) = \hat{H}(\xi, \Phi(\xi)), \ p^{\Phi}(\xi) = \hat{p}(\xi, \Phi(\xi)), \ \xi = (t, \mathbf{x}) \in D_1,$$

а также форму

$$\tilde{\Omega}(\xi, d\xi) = -H^{\Phi}(\xi)\,dt + (p^{\Phi}(\xi), d\mathbf{x}), \ d\xi = (dt, d\mathbf{x}).$$

Нашей целью является изучение отображений $\tilde{\Phi}$ и соответствующих им множеств $\tilde{E}$, для которых *форма* $\tilde{\Omega}$ *замкнута*. Замкнутость формы $\tilde{\Omega}$ согласно определению характеризуется соотношениями

$$-\nabla_{\mathbf{x}} H^{\Phi}(\xi) = p_t^{\Phi}(\xi), \quad \frac{\partial p_i^{\Phi}(\xi)}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j^{\Phi}(\xi)}{\partial x_i}, \ i, j = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Теорема. *Если форма* $\tilde{\Omega}$ *замкнута, то решения уравнения*

$$\mathbf{f}'(t) = \tilde{\Phi}(t, \mathbf{f}(t))$$

являются экстремалями функционала I.

Доказательство. Пусть $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}^n$ — решение уравнения. Тогда

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = \frac{d}{dt} p^{\Phi}(t, \mathbf{f}(t)) = p_t^{\Phi} + p_{\mathbf{x}}^{\Phi} \mathbf{f}' =$$
$$= p_t^{\Phi} + \textstyle\sum_{j=1}^n p_{x_j}^{\Phi} \tilde{\Phi}_j.$$

Воспользуемся первым из соотношений (3) и определением функции H^{Φ}:

$$\frac{d}{dt} L_{v_i}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = -H_{x_i}^{\Phi} + \sum_{j=1}^n p_{ix_j}^{\Phi} \tilde{\Phi}_j = L_{x_i}(t, \mathbf{f}(t), \tilde{\Phi}(t, \mathbf{f}(t))) +$$
$$+ \sum_{j=1}^n L_{v_j}(\ldots) \tilde{\Phi}_{jx_i}(t, \mathbf{f}(t)) - \sum_{j=1}^n p_{jx_i}^{\Phi}(\ldots) \tilde{\Phi}_j(\ldots) -$$
$$- \sum_{j=1}^n p_j^{\Phi}(\ldots) \Phi_{jx_i}(\ldots) + \sum_{j=1}^n p_{ix_j}^{\Phi}(\ldots) \tilde{\Phi}_j(\ldots) =$$
$$= L_{x_i}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) - \sum_{j=1}^n p_{jx_i}^{\Phi} \tilde{\Phi}_j + \sum_{j=1}^n p_{ix_j}^{\Phi} \tilde{\Phi}_j.$$

Две суммы погасили друг друга в соответствии с определением p^{Φ}, оставшиеся суммы равны в силу второй группы соотношений (3). Поэтому

$$\frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t)) = \nabla_{\mathbf{x}} L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))$$

Теорема доказана.

Если отображение $\tilde{\Phi}$ *таково, что форма* $\tilde{\Omega}$ *замкнута, то функция наклона* $\tilde{\Phi}$ *называется наклоном поля. Соответствующее множество* $\tilde{E}$ *экстремалей, выстилающее* D_1, *называется полем экстремалей.*

Некоторую особенность представляет случай $n=1$. При этом соотношения, характеризующие замкнутость формы, сводятся к единственному:

$$-H_x^{\Phi}=p_t^{\Phi}. \tag{4}$$

При $n=1$ *любое множество* $\tilde{E}$ *экстремалей, выстилающее область, является полем экстремалей.*

Для доказательства преобразуем (4):

$$-H_x^{\Phi}(\xi)=L_x(\xi,\ \tilde{\Phi}(\xi))+L_v(\xi,\ \tilde{\Phi}(\xi))\,\tilde{\Phi}_x(\xi)-p_x^{\Phi}(\xi)\,\tilde{\Phi}(\xi)-$$
$$-p^{\Phi}(\xi)\,\tilde{\Phi}_x(\xi)=L_x(\xi,\ \tilde{\Phi}(\xi))-p_x^{\Phi}(\xi)\,\tilde{\Phi}(\xi),$$

поэтому

$$p_t^{\Phi}(\xi)=L_x(\xi,\ \tilde{\Phi}(\xi))-p_x^{\Phi}(\xi)\,\tilde{\Phi}(\xi).$$

Если $\tilde{\Phi}$ определено формулой (2) по множеству $\tilde{E}$, то в точке $(t,\ f(t))$ полученная формула равносильна соотношению

$$L_x(t,\ f(t),\ f'(t))=p_t^{\Phi}(t,\ f(t))+p_x^{\Phi}(t,\ f(t))\,f'(t)=$$
$$=\frac{d}{dt}L_v(t,\ f(t),\ f'(t)),$$

которое выполняется в силу уравнения Эйлера.

99. Трансверсали. Начнем с построения примера поля экстремалей. В конце пункта мы убедимся, что этот пример с незначительными оговорками имеет универсальный характер. Пусть Γ — *гиперповерхность* в $\mathbf{R}^{n+1}$, т. е. n-мерная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$. Обозначим вектор нормали к поверхности Γ в точке s, $s\in\Gamma$, через $N(s)$. Пусть $\gamma=\{\Delta,\ \mathbf{f}\}$ — пара, график которой пересекает Γ в точке $s=(t,\ \mathbf{f}(t))$. Согласно определению п. 75 *пара* γ *пересекает* Γ (в точке s) *трансверсально, если существует такое число* λ, *что*

$$(-\hat{H}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\ \hat{p}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)))=\lambda N(t,\ \mathbf{f}(t)),$$

иначе говоря, вектор $(-\hat{H}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)),\ \hat{p}(t,\ \mathbf{f}(t)),\ \mathbf{f}'(t)))$ направлен по вектору нормали $N(t,\ \mathbf{f}(t))$. В типичном случае уравнение

$$(-\hat{H}(s,\ \mathbf{v}),\ \hat{p}(s,\ \mathbf{v}))=\lambda N(s),\ s=(t,\ \mathbf{x}), \tag{5}$$

однозначно определяет число λ и вектор $\mathbf{v}$. В частности, при $L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v})=l(t,\ \mathbf{x})(1+\mathbf{v}^2)^{1/2}$ соотношение (5) имеет вид

$$l(s)\frac{(1,\ \mathbf{v})}{\sqrt{1+\mathbf{v}^2}}=\lambda N(s)=\lambda(N_0(s),\ N_1(s)),\ N_0(s)\in\mathbf{R},\ N_1(s)\in\mathbf{R}^n,$$

откуда $\lambda = \text{sign}\, N_0 \| N(s) \|^{-1} l(s)$, $\mathbf{v} = N_0^{-1}(s) N_1(s)$. Для разрешимости уравнения (5) в этом случае необходимо и достаточно $N_0(s) \neq 0$.

Пусть на Γ задано такое гладкое отображение $V\colon \Gamma \to \mathbf{R}^n$, что при некоторой функции $\lambda : \Gamma \to \mathbf{R}$ выполняется соотношение

$$(-\hat{H}(s, V(s)), \hat{p}(s, V(s))) = \lambda(s) N(s), \; s \in \Gamma.$$

Экстремаль $\gamma = \{\Delta, \mathbf{f}\}$, удовлетворяющая начальному условию

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{x}, \; \mathbf{f}'(t) = V(s), \; s = (t, \mathbf{x}) \in \Gamma,$$

пересекает Γ трансверсально. Существует область D_1, содержащая Γ, которая выстилается множеством E_Γ подобных экстремалей, проведенных через все точки гиперповерхности Γ.

Теорема 1. *Множество E_Γ является полем экстремалей.*

Доказательство. Обозначим через $\gamma(\xi)$ заключенный между Γ и ξ отрезок экстремали из множества E_Γ, проходящий через ξ, $\xi \in D_1$ (рис. 22). Введем функцию $S : D_1 \to \mathbf{R}$, полагая $S(\xi) = I(\gamma(\xi))$. Теорема будет установлена, если показать, что $dS = \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ — форма, построенная по функции наклона $\tilde{\Phi}$, отвечающей множеству E_Γ, выстилающему D_1. Пусть $\xi \in D_1$ и $h \in \mathbf{R}^{n+1}$. При достаточно малых τ определен путь $\tau \to \xi + \tau h$, а с ним и путь $\tau \to \gamma(\xi + \tau h)$. Рассмотрим производную

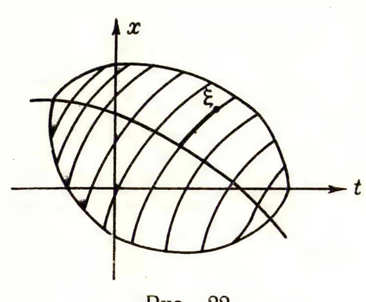


Рис. 22.

$$\frac{d}{d\tau} S(\xi + \tau h) = \frac{d}{d\tau} I(\gamma(\xi + \tau h)).$$

Она может быть вычислена с помощью общей формы первой вариации. Так как $\gamma(\xi + \tau h)$ — экстремаль, то дело сводится к частному случаю и результат содержит только внеинтегральные члены (см. п. 75). Если учесть, кроме того, что $\gamma(\xi + \tau h)$ пересекает гиперповерхность Γ трансверсально, то общая форма первой вариации дает

$$\frac{d}{d\tau} S(\xi + \tau h) = -H^{\Phi}(\xi) h_0 + (p^{\Phi}(\xi), \mathbf{h}_1),$$

$h = (h_0, \mathbf{h}_1)$, $h_0 \in \mathbf{R}$, $\mathbf{h}_1 \in \mathbf{R}^n$. Функции H^{Φ} и p^{Φ} гладки, поэтому из полученной формулы следует, что

$$dS(\xi;\, d\xi) = -H^{\Phi}(\xi)\, dt + (p^{\Phi}(\xi), d\xi).$$

Теорема доказана.

Другим примером поля экстремалей, которое может рассматриваться как вырожденный случай только что построенного, является так называемое *центральное поле экстремалей*. Фиксируем

точку $\xi_0 = (t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ и рассмотрим экстремали $\gamma = \{\Delta, \mathbf{f}\}$, графики которых проходят через нее:

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{f}'(t_0) = \mathbf{v}.$$

Пусть вектор $\mathbf{v}$ пробегает некоторую область в $\mathbf{R}^n$; тогда множеством E_{ξ_0} соответствующих экстремалей вида $\gamma = \{(t_0, b), \mathbf{f}\}$ или $\{(a, t_0), \mathbf{f}\}$ можно выстлать некоторую область D_1 в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Теорема 2. *Множество E_{ξ_0} — поле экстремалей.*

Доказательство является очевидной модификацией доказательства предыдущей теоремы.

Множество E_{ξ_0} называется *центральным полем экстремалей.*

Пусть множество $\tilde{E}$ экстремалей выстилает область D_1. *Расположенная в D_1 гиперповерхность Γ называется трансверсалью множества $\tilde{E}$, если экстремали множества $\tilde{E}$ пересекают Γ трансверсально.* Геометрически построение трансверсали к множеству $\tilde{E}$, проходящей через заданную точку области D_1,состоит в построении по заданному на D_1 векторному полю $\tilde{\Phi}$ гиперповерхности, имеющей в каждой точке заданную (с точностью до множителя) нормаль. Пусть отображение $\tilde{\Phi}$ таково, что форма $\tilde{\Omega} \neq 0$ всюду на D_1. Тогда справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы множество $\tilde{E}$ экстремалей было полем экстремалей, необходимо и достаточно, чтобы через каждую точку области D_1 можно было провести трансверсаль множества $\tilde{E}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть задано поле экстремалей. Пусть $\xi_0 \in D_1$. В некоторой окрестности точки ξ_0 форма $\tilde{\Omega}$ имеет первообразную S. Так как $\tilde{\Omega} \neq 0$ всюду на D_1, то множество Γ, определяемое уравнением $S(\xi) = S(\xi_0)$, есть гиперповерхность. Компоненты нормали к ней равны $(S_t(\xi), S_{x_1}(\xi), \ldots, S_{x_n}(\xi)) = (-H^{\Phi}(\xi), p^{\Phi}(\xi))$. Таким образом, Γ — трансверсаль множества $\tilde{E}$. Достаточность. Пусть Γ — трансверсаль к множеству $\tilde{E}$, проходящая через точку ξ_0. Ограничим на Γ отображение $\tilde{\Phi}$ и примем его за отображение V, фигурирующее в теореме 1. Поле экстремалей $\tilde{E}_{\Gamma}$, построенное по этому отображению, является подмножеством заданного множества $\tilde{E}$. Поэтому на некоторой окрестности точки ξ_0 форма $\tilde{\Omega}$ замкнута. Теорема доказана.

В теореме подразумевается возможность провести лишь трансверсаль, лежащую в некоторой окрестности рассматриваемой точки. Не разъясняя этого подробнее, отметим, что из такой возможности в действительности вытекает большее, а именно возможность выстлать область D_1 трансверсалями, не прерывающимися внутри D_1, так, что через каждую точку области будет проходить, и притом единственная, трансверсаль.

Геометрическая терминология. Поле экстремалей функционала длины, для которого $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = (1 + \mathbf{v}^2)^{1/2}$, транс-

версально пересекающих заданную гиперповерхность Г, легко описать геометрически. Его составляют экстремали, графики которых — прямые, пересекающие Г ортогонально. Центральное поле экстремалей образуют экстремали, графики которых — прямые, проходящие через заданную точку. Свойства этого функционала служат образцом для многих построений вариационного исчисления. В вариационном исчислении часто используются термины, порожденные аналогией между общими функционалами и функционалом длины. Пусть I — интегральный функционал и функция L неотрицательна: $L \geqslant 0$. В согласии с упомянутой аналогией число $I(\gamma)$, $\gamma = \{\Delta, \mathbf{f}\}$, часто называют *длиной кривой* $t \to (t, \mathbf{f}(t))$, $t \in \Delta = [a, b]$, в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ точек $(t, \mathbf{x})$. Точная нижняя граница значений функционала I на множестве кривых подобного вида с фиксированными граничными точками $\xi_0 = (a, \mathbf{f}(a))$, $\xi = (b, \mathbf{f}(b))$, если она существует, называется *расстоянием между точками* ξ_0 *и* ξ. В типичных случаях расстояние $S(\xi, \xi_0)$ между точками ξ_0 и ξ равно длине экстремали, график которой соединяет ξ_0 и ξ. Функция $\xi \to S(\xi, \xi_0)$ является первообразной формы $\tilde{\Omega}$ для центрального поля экстремалей, графики которых проходят через точку ξ_0. Точная нижняя граница значений функционала I на множестве кривых, один конец которых расположен на заданной гиперповерхности Γ_0, а другой фиксирован $\xi = (b, \mathbf{f}(b))$, называется *расстоянием между* Γ_0 *и* ξ. В типичных случаях расстояние $S(\xi, \Gamma_0)$ является значением функционала I на экстремали, пересекающей Γ_0 трансверсально. Функция $\xi \to S(\xi, \Gamma_0)$ является первообразной формы $\tilde{\Omega}$ для поля экстремалей, пересекающих Γ_0 трансверсально. Точная нижняя граница значений функционала I на множестве кривых, концы которых лежат на двух заданных гиперповерхностях Γ_0 и Γ, называется *расстоянием между* Γ_0 *и* Γ. В типичных случаях расстояние равно значению функционала на экстремали, пересекающей трансверсально Γ_0 и Γ. Если гиперповерхность Γ такова, что $S(\xi, \Gamma_0)|_\Gamma = S_0$ — постоянная, то гиперповерхности Γ_0 и Γ называют *эквидистантными*. Экстремаль, пересекающая Γ_0 трансверсально, трансверсально пересекает и Γ. Длина ее отрезка, заключенного между Γ_0 и Γ, равна S_0.

100. Майерова поверхность. В дальнейшем изложении удобно перейти к уравнениям Гамильтона. Это приведет к новым точкам зрения на поля экстремалей. Исходным объектом будет теперь интегральный функционал

$$J(\{\Delta, (\mathbf{f}, \mathbf{g})\}) = \int_\Delta [(\mathbf{g}(t), \mathbf{f}'(t)) - H(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))]\, dt.$$

Пусть Φ — отображение $D_1 \to \mathbf{R}^n$, D_1 — область в $\mathbf{R}^{n+1}$. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{2n+1}$ с точками $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ $(n+1)$-мерную поверхность M, имеющую уравнение

$$\mathbf{p} = \Phi(\xi), \quad \xi = (t, \mathbf{x}) \in D_1.$$

Поверхность M называется майеровой поверхностью, если форма Ω

$$\Omega(\xi, d\xi) = -H(\xi, \Phi(\xi))\,dt + (\Phi(\xi), d\mathbf{x})$$

замкнута

Замкнутость формы Ω равносильна соотношениям

$$-\nabla_{\mathbf{x}} H(\xi, \Phi(\xi)) = \Phi_t(\xi), \quad \frac{\partial \Phi_i(\xi)}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_j(\xi)}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Для того чтобы функция $S: D_1 \to \mathbf{R}$ была первообразной формы Ω, необходимо и достаточно, чтобы S удовлетворяла соотношению*

$$S_t(t, \mathbf{x}) + H(t, \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})) = 0,$$

при этом $\Phi = \nabla_{\mathbf{x}} S$.

Указанное соотношение называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Первообразная S формы Ω называется *функцией поля.*

Доказательство Из равенства $dS = \Omega$ следует

$$S_t(\xi) = -H(\xi, \Phi(\xi)), \quad \nabla_{\mathbf{x}} S(\xi) = \Phi(\xi).$$

Необходимость установлена. Достаточность. Пусть функция S удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби. Положим $\Phi = \nabla_{\mathbf{x}} S$. Тогда

$$\Omega(\xi, d\xi) = -H(\xi, \nabla_{\mathbf{x}} S(\xi))\,dt + (\nabla_{\mathbf{x}} S(\xi), d\mathbf{x}) = \\ = S_t(\xi)\,dt + (\nabla_{\mathbf{x}} S(\xi), d\mathbf{x}).$$

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что всякое решение $S: D_1 \to \mathbf{R}$ уравнения Гамильтона — Якоби формулой

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} S(\xi)$$

задает майерову поверхность.

Майерова поверхность и поле экстремалей. Пусть заданы функционал J и отображение $\tilde{\Phi}: D_1 \to \mathbf{R}^n$, которое определяет поверхность $\tilde{M}$ уравнением

$$\mathbf{v} = \tilde{\Phi}(\xi), \quad \xi \in D_1. \qquad (7)$$

Введем отображение $\Phi: D_1 \to \mathbf{R}^n$, полагая

$$\Phi(\xi) = p^{\Phi}(\xi) = \nabla_{\mathbf{v}} L(\xi, \tilde{\Phi}(\xi)).$$

Отображение Φ определяет поверхность M

$$\mathbf{p} = \Phi(\xi), \quad \xi \in D_1, \qquad (8)$$

в $\mathbf{R}^{2n+1}$.

Пусть, напротив, заданы функционал J и отображение $\Phi: D_1 \to \mathbf{R}^n$, которое определяет поверхность M вида (8). Введем отображение $\tilde{\Phi}: D_1 \to \mathbf{R}^n$, полагая

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \nabla_{\mathbf{p}} H(\xi, \Phi(\xi)).$$

Отображение $\tilde{\Phi}$ определяет поверхность $\tilde{M}$ вида (7).

Две описанные конструкции взаимно-обратимы, если функции L и H двойственны по Юнгу относительно последнего аргумента. При этом достаточно считать, что функции L и H определены и двойственны по Юнгу лишь в некоторых областях, содержащих соответственно $\tilde{M}$ и M. В этом предположении справедливо очевидное равенство $\tilde{\Omega} = \Omega$ и, следовательно, справедлива

Теорема 2. *Для того чтобы отображение $\tilde{\Phi}$ было наклоном поля, необходимо и достаточно, чтобы поверхность M была майеровой.*

Если майерова поверхность задается решением S уравнения Гамильтона — Якоби, то наклон поля дается формулой

$$(t, \mathbf{x}) \to \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})).$$

Уравнения для экстремалей, образующих поле, имеют вид

$$\mathbf{f}'(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{f}(t), \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{f}(t))).$$

Говорят, что множество E пар $\{\Delta, (\mathbf{f}, \mathbf{g})\}$, где $\Delta = (a, b)$ — интервал, а $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ — вектор-функции $\Delta \to \mathbf{R}^n$, выстилает поверхность M, если:

1) *графики пар из E лежат на M;*

2) *через каждую точку поверхности M проходит график пары из E;*

3) *отображение $D_1 \to \mathbf{R}^{2n}$, задаваемое формулой*

$$\xi \to (\mathbf{f}'(t), \mathbf{g}'(t)),$$

где $\{\Delta, (\mathbf{f}, \mathbf{g})\}$ — пара, график которой проходит через точку $(\xi, \Phi(\xi))$, $\xi = (t, \mathbf{x})$, является гладким.

Множеству $\tilde{E}$, выстилающему D_1, можно поставить в соответствие множество E, выстилающее M, сопоставляя паре $\{\Delta, \mathbf{f}\}$ пару $\{\Delta, (\mathbf{f}, \mathbf{g})\}$, где $\mathbf{g}(t) = \Phi(t, \mathbf{f}(t))$. Множеству E, выстилающему M, можно поставить в соответствие множество $\tilde{E}$, выстилающее D_1, сопоставляя паре $\{\Delta, (\mathbf{f}, \mathbf{g})\}$ пару $\{\Delta, \mathbf{f}\}$.

Экстремалями функционала J являются пары $\gamma = \{\Delta, (\mathbf{g}, \mathbf{f})\}$, где $\Delta = (a, b)$ — интервал, а $(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ — определенное на нем решение уравнений Гамильтона

$$\mathbf{f}'(t) = \nabla_{\mathbf{p}} H(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}), \quad \mathbf{g}'(t) = -\nabla_{\mathbf{x}} H(t, \mathbf{f}, \mathbf{g}).$$

Из теории дифференциальных уравнений следует, что решения канонических уравнений, графики которых имеют общую точку, совпадают на общем интервале определения.

Пусть функции L и H двойственны по Юнгу, тогда: 1) множество E, соответствующее множеству экстремалей $\tilde{E}$ функционала I, есть множество экстремалей функционала J, если $\Phi = \mathbf{p}^{\Phi}$; 2) множество $\tilde{E}$, соответствующее множеству экстремалей E функционала J, есть множество экстремалей функционала I, причем $\tilde{\Phi}(\xi) = \nabla_{\mathbf{p}} H(\xi, \Phi(\xi))$.

Описанные конструкции, как и конструкции, связывающие $\tilde{\Phi}$ и Φ, взаимно-обратны. Отсюда следует, что для функции H, допускающей преобразование Лежандра, майерова поверхность может быть выстлана экстремалями функционала J. Предположение о том, что функция H допускает преобразование Лежандра, в этом утверждении излишне.

Теорема 3. *Майерова поверхность может быть выстлана множеством экстремалей функционала* J.

Доказательство. Рассмотрим множество $\tilde{E}$ решений уравнения

$$\mathbf{f}'(t)=\tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t)),\ \text{где}\ \tilde{\Phi}(\xi)=\nabla_{\mathbf{p}}H(\xi,\ \Phi(\xi)),$$

выстилающее D_1. Рассмотрим соответствующее множество E пар $\{\Delta,\ (\mathbf{f},\ \mathbf{g})\}$, выстилающее M. Убедимся, что оно является множеством экстремалей функционала J. Согласно определению множества E

$$\mathbf{g}(t)=\Phi(t,\ \mathbf{f}(t)),$$

поэтому введенное уравнение можно записать следующим образом:

$$\mathbf{f}'(t)=\nabla_{\mathbf{p}}H(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t)).$$

Итак, достаточно проверить, что

$$\mathbf{g}'(t)=-\nabla_{\mathbf{x}}H(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{g}(t)).$$

Формально проверка повторяет выкладку из п. 98:

$$\mathbf{g}'=\Phi_t+(\nabla_{\mathbf{x}}\Phi,\ \mathbf{f}')=\Phi_t+(\nabla_{\mathbf{x}}\Phi,\ \nabla_{\mathbf{p}}H).$$

Замкнутость формы Ω равносильна соотношениям (6), поэтому

$$g_i'=-H_{x_i}-\sum\nolimits_{j=1}^{n}H_{p_j}\Phi_{jx_i}+\sum\nolimits_{j=1}^{n}\Phi_{ix_j}H_{p_j}=-H_{x_i}.$$

Теорема доказана.

101. Лагранжева поверхность. Пусть D — область в $\mathbf{R}^n$ и Φ_0 — отображение $D\to\mathbf{R}^n$. Рассмотрим n-мерную поверхность Γ в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$, состоящую из точек $(\mathbf{x},\ \Phi_0(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x}\in D$. *Поверхность* Γ *называется лагранжевой, если форма* ω

$$\omega(\mathbf{x},\ d\mathbf{x})=(\Phi_0(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x})$$

на D *замкнута. Если область* D *односвязна, то поверхность* Γ *лагранжева тогда и только тогда, когда существует такая функция* $S_0:D\to\mathbf{R}$, *что* $\Phi_0=\nabla S_0$.

Рассмотрим решение $t\to(\varphi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p}),\ \psi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p}))$ уравнений Гамильтона

$$\varphi_t(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})=\nabla_{\mathbf{p}}H(t,\ \varphi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p}),\ \psi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})),$$
$$\psi_t(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})=-\nabla_{\mathbf{x}}H(t,\ \varphi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p}),\ \psi(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x}$, $\psi(t_0, \mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}$, t_0 — фиксированное число. *Зависящее от параметра t отображение* $\mathfrak{m}_t: \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, *определяемое формулами* $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \to \mathfrak{m}_t(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = (\varphi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}), \psi(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}))$, *называется движением пространства* $\mathbf{R}^{2n}$, *порожденным уравнениями Гамильтона.* Если K — множество в $\mathbf{R}^{2n}$, то через K_t условимся обозначать множество, состоящее из точек $\mathfrak{m}_t(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in K$.

Пусть Γ — лагранжева поверхность. Рассмотрим отображение $A_t: D \to \mathbf{R}^n$

$$A_t(\mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}, \Phi_0(\mathbf{x})).$$

Отображение A_{t_0} тождественное. Поэтому A_t обратимо, если область D ограничена, функция S гладка на $\bar{D}$ и $|t - t_0| < \varepsilon$, ε достаточно мало.

Предположим, что отображение A_t при $t \in \Delta = (a, b)$, $t_0 \in \Delta$, обратимо. Обозначим обратное отображение через B_t, а область, на которой оно определено, — через D_t. Поверхность Γ_t может быть описана уравнением

$$\mathbf{p} = \Phi_t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D_t,$$

где

$$\Phi_t(\mathbf{x}) = \psi(t, B_t(\mathbf{x}), \Phi_0(B_t(\mathbf{x}))).$$

Теорема 1. *Если отображение A_t, $t \in \Delta$, обратимо, то поверхность Γ_t лагранжева.*

Доказательство. Нужно убедиться, что форма ω_t

$$\omega_t(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = (\Phi_t(\mathbf{x}), d\mathbf{x})$$

на D_t замкнута. Рассмотрим форму

$$\omega'_t(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \sum_{i,\ j=1}^{n} (\Phi_t)_j (A_t(\mathbf{x})) \frac{\partial (A_t(\mathbf{x}))_j}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i,\ j=1}^{n} \eta_j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \zeta_j(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i = (\eta, d\zeta),$$

где $\eta(t, \mathbf{x}) = \psi(t, \mathbf{x}, \Phi_0(\mathbf{x}))$, $\zeta(t, \mathbf{x}) = \varphi(t, \mathbf{x}, \Phi_0(\mathbf{x}))$. Форма ω'_t отличается от формы ω_t заменой переменных $\mathbf{x} \to A_t(\mathbf{x})$. Формы ω_t и ω'_t замкнуты или не замкнуты одновременно. Замкнутость формы ω'_t равносильна соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{9}$$

Так как $\omega'_{t_0} = \omega$, то форма ω'_{t_0} замкнута. Поэтому соотношения (9) выполнены при $t = t_0$. Таким образом, достаточно проверить, что частная производная по t левой стороны соотношений (9)

равна нулю. Воспользуемся уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}-\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}H_{x_k}(t,\zeta(t,\mathbf{x}),\eta(t,\mathbf{x}))\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}H_{p_k}(\ldots)-\frac{\partial}{\partial x_j}H_{x_k}(\ldots)\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}H_{p_k}(\ldots)\right]=$$

$$=\sum_{k,\ l=1}^{n}\left[H_{x_kx_l}(\ldots)\frac{\partial\zeta_l}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}+H_{x_kp_l}(\ldots)\frac{\partial\eta_l}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_j}-\right.$$

$$-H_{x_lp_k}(\ldots)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial\zeta_l}{\partial x_j}-H_{p_lp_k}(\ldots)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_l}{\partial x_j}-H_{x_kx_l}(\ldots)\frac{\partial\zeta_l}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_i}-$$

$$\left.-H_{x_kp_l}(\ldots)\frac{\partial\eta_l}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_k}{\partial x_i}-H_{p_kx_l}(\ldots)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\zeta_l}{\partial x_i}-H_{p_kp_l}(\ldots)\frac{\partial\eta_k}{\partial x_j}\frac{\partial\eta_l}{\partial x_i}\right]=0.$$

Теорема доказана.

Лагранжевы поверхности Γ_t, описанные в предыдущей теореме, выстилают в $\mathbf{R}^{2n+1}$ $(n+1)$-мерную поверхность M:

$$\mathbf{p}=\Phi_t(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in D_t,\ t\in\Delta.$$

Теорема 2. *Поверхность M является майеровой.*

Доказательство. Нужно убедиться, что форма Ω

$$\Omega(\xi,\ d\xi)=-H(t,\ \mathbf{x},\ \Phi_t(\mathbf{x}))\,dt+(\Phi_t(\mathbf{x}),\ d\mathbf{x})$$

замкнута. Вновь удобно перейти к форме Ω', которая отличается от формы Ω заменой переменных $t\to t$, $\mathbf{x}\to A_t(\mathbf{x})$:

$$\Omega'(\xi,\ d\xi)=-H(t,\ \zeta(\ldots),\ \eta(\ldots))\,dt+\sum_j\eta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}dt+\sum_{ij}\eta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}dx_i.$$

Установим, что форма Ω' замкнута. Часть соотношений, выражающих этот факт, установлена при доказательстве замкнутости формы ω_t'. Остается проверить соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-H(t,\ \zeta,\ \eta)+\sum_j\eta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\sum_j\eta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}.$$

Продифференцируем, пользуясь уравнениями Гамильтона

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-H(t,\zeta,\eta)+\sum_j\eta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-H+\sum_j\eta_jH_{p_j}\right]=$$

$$=\sum_j\left[-H_{x_j}\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}-H_{p_j}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}+\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}H_{p_j}\right]+\sum_j\eta_j\frac{\partial}{\partial x_i}H_{p_j}=$$

$$=-\sum_jH_{x_j}\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}+\sum_j\eta_j\frac{\partial}{\partial x_i}H_{p_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_j\eta_j\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}=-\sum_jH_{x_j}\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i}+\sum_j\eta_j\frac{\partial}{\partial x_i}H_{p_j}.$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы* $(n+1)$*-мерная поверхность* M *в* $\mathbf{R}^{2n+1}$, *определяемая уравнением*

$$\mathbf{p}=\Phi(t,\ \mathbf{x}),\ (t,\ \mathbf{x})\in D_1,$$

D_1 — *область в* $\mathbf{R}^{n+1}$, *выстланная решениями уравнений Гамильтона, была майеровой поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы каждая* n*-мерная поверхность* $\mathbf{p}=\Phi(t,\ \mathbf{x})$, t *фиксировано,* $(t,\ \mathbf{x})\in D_1$, *в* $\mathbf{R}^{2n}$ *была лагранжевой.*

Вместо слов «поверхность, заданная соотношением $\mathbf{p}=\Phi(t,\ \mathbf{x})$, t фиксировано, $(t,\ \mathbf{x})\in D_1$» следовало бы точнее сказать «поверхность, заданная соотношением $\mathbf{p}=\Phi(t,\ \mathbf{x})$, t фиксировано, $\mathbf{x}$ пробегает связную компоненту открытого в $\mathbf{R}^n$ множества, определяемого условием $(t,\ \mathbf{x})\in D_1$».

Доказательство. По M стандартно конструируется форма Ω. Если она замкнута, то при фиксированном t замкнута и форма ω_t

$$\omega_t(\mathbf{x},\ d\mathbf{x})=(\Phi(t,\ \mathbf{x}),\ d\mathbf{x}).$$

Это рассуждение доказывает необходимость. Достаточность. Пусть $\xi_0=(t_0,\ \mathbf{x}_0)\in D_1$. Рассмотрим n-мерную поверхность Γ в $\mathbf{R}^{2n}$, заданную соотношением $\mathbf{p}=\Phi(t_0,\ \mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ пробегает некоторую окрестность U точки $\mathbf{x}_0$, такую, что $(t_0,\ \mathbf{x})\in D_1$, когда $\mathbf{x}\in U$. Если Γ — лагранжева поверхность, то при достаточно малых $t-t_0$ множества Γ_t, $\Gamma_{t_0}=\Gamma_0$, выстилают $(n+1)$-мерную майерову поверхность M_0 в $\mathbf{R}^{2n+1}$. Так как поверхность M выстилается решениями уравнений Гамильтона, то M и M_0 в некоторой окрестности точки $(\xi_0,\ \Phi(\xi_0))$ совпадают. Следовательно, форма Ω, соответствующая поверхности M, замкнута на некоторой окрестности точки ξ_0. Ввиду произвольности ξ_0 это означает, что форма Ω замкнута на D_1. Теорема доказана.

Б. ОБОБЩЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

102. Обобщения. Понятия лагранжевой и майеровой поверхностей допускают естественные обобщения.

n*-мерная поверхность* Γ *в пространстве* $\mathbf{R}^{2n}$ *с точками* $(\mathbf{x},\ \mathbf{p})$, $(\mathbf{x},\ \mathbf{p})\in\mathbf{R}^n$, *называется лагранжевой, если форма* $\omega=(\mathbf{p},\ d\mathbf{x})$, *ограниченная на* Γ, *замкнута.*

Если Γ может быть покрыта «кусками», каждый из которых допускает параметрическое описание

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\alpha}),\ \mathbf{p}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha}),\ \alpha\in D,$$

где D — область в $\mathbf{R}^n$, то приведенное выше определение можно расшифровать следующим образом: отображения $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\psi}$ должны быть такими, что форма

$$\sum\nolimits_{i,\ j=1}^{n}\psi_j(\alpha)\,\frac{\partial\varphi_j(\alpha)}{\partial\alpha_i}\,d\alpha_i$$

замкнута. При переходе к другому параметрическому описанию того же «куска» поверхности Г свойство формы быть замкнутой сохраняется.

Пусть $\mathfrak{m}_t$ — движение $\mathbf{R}^{2n}$, порождаемое уравнениями Гамильтона, тождественное при $t=t_0$. Если Γ — лагранжева поверхность, то n-мерная поверхность Γ_t, $\Gamma_t=\mathfrak{m}_t(\xi)$, $\xi\in\Gamma$, также является лагранжевой.

$(n+1)$-*мерная поверхность* M *в пространстве* $\mathbf{R}^{2n+1}$ *с точками* $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, $t\in\mathbf{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{p}\in\mathbf{R}^n$, *называется майеровой, если форма* $\Omega=-H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})\,dt+(\mathbf{p}, d\mathbf{x})$, *ограниченная на* M, *замкнута. Это определение может быть расшифровано в том же плане, что и опред ление лагранжевой поверхности.*

Поверхность $M=\{(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}): t\in\Delta, (\mathbf{x}, \mathbf{p})\in\Gamma_t\}$, выстланная лагранжевыми поверхностями Γ_t, $t\in\Delta$, Δ — интервал, является майеровой. Майерова поверхность может быть выстлана решениями уравнений Гамильтона. Для того чтобы выстланная решениями уравнений Гамильтона $(n+1)$-мерная поверхность в $\mathbf{R}^{2n+1}$ была майеровой, необходимо и достаточно, чтобы все ее сечения плоскостями «t фиксировано» были лагранжевыми поверхностями.

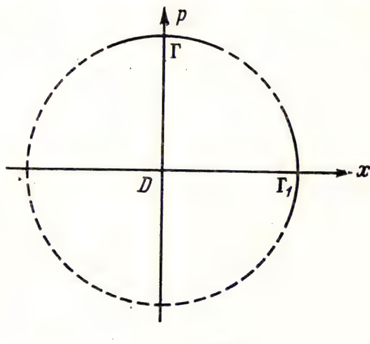


Рис. 23.

Доказательства сформулированных общих утверждений могут быть легко получены с помощью приемов, изложенных в предыдущем параграфе. Мы не будем на них останавливаться.

П р а в и л ь н о п р о е к т и р у е м а я м а й е р о в а п о в е р х н о с т ь. В предыдущем параграфе изучались лагранжева и майерова поверхности, допускающие описание вида

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}, \quad \mathbf{p}=\Phi_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in D\subset\mathbf{R}^n,$$

и

$$t=t, \quad \mathbf{x}=\mathbf{x}, \quad \mathbf{p}=\Phi(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x})\in D_1\subset\mathbf{R}^{n+1},$$

соответственно. *Такие поверхности в отличие от общих будут называться правильно проектируемыми* (*на конфигурационное и расширенное конфигурационное пространства соответственно*). Правильно проектируемая лагранжева поверхность и общая лагранжева поверхность изображены на рис. 23. Если лагранжева поверхность Г правильно проектируема, то лагранжева поверхность Γ_t уже не обязательно однозначно проектируема на конфигурационное пространство.

Пример. Пусть $n=1$ и $H(x, p)=\frac{1}{2}(p^2+x^2)$. Известно, что движение m_t, отвечающее этой функции H, есть *вращение плоскости* $\mathbf{R}^2$ с точками (x, p) вокруг начала с *угловой скоростью* -1. При $n=1$ всякая кривая в $\mathbf{R}^2$ является

лагранжевой. Кривая, правильно проектируемая на конфигурационное пространство, при вращении на некоторый угол утратит это свойство; в частности, кривая Γ_1, изображенная на рис. 23, есть $m_{\frac{\pi}{2}+t_0}(\xi)$, $\xi \in \Gamma$.

Майеровы поверхности, правильно проектируемые на расширенное конфигурационное пространство, выделены своей связью с полями экстремалей. В общем случае множество экстремалей $\{\Delta, (\mathbf{f}, \mathbf{g})\}$ функционала J, выстилающее майерову поверхность M, после проектирования на конфигурационное пространство, т. е. после перехода к множеству экстремалей $\{\Delta, \mathbf{f}\}$ функционала I, может не выстилать множества в расширенном конфигурационном пространстве, над которым расположена поверхность M. На рис. 24 изображена майерова поверхность, в которую переходит дуга окружности при движении. На рис. 25 изображено соответствующее множество экстремалей функционала I. Оно имеет *огибающую* и не выстилает множества, над которым расположена майерова поверхность.

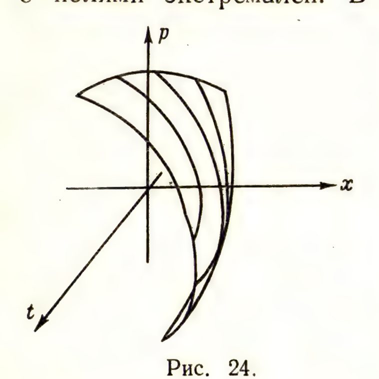


Рис. 24.

103. Погружение экстремали в поле. Пусть $\gamma = \{\Delta, \mathbf{f}\}$, $\mathbf{f}: \Delta = [a, b] \to \mathbf{R}^n$ — экстремаль функционала I. Существуют ли область D_1 в $\mathbf{R}^{n+1}$ и такое поле $\tilde{E}$ экстремалей, выстилающее D_1, что ограничение одной из экстремалей поля $\tilde{E}$ на интервал Δ совпа-

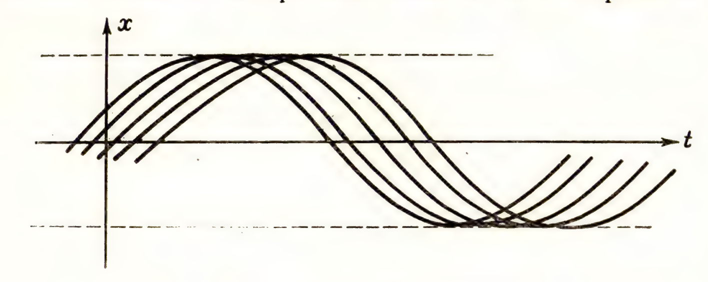


Рис. 25.

дает с экстремалью $\mathbf{f}$? Короче этот вопрос формулируется так: *можно ли погрузить экстремаль в поле?*

Теорема. *Ответ положителен, если функционал I таков, что*

$$\det \{F_{v_i v_j}(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\} \neq 0, \quad t \in \Delta,$$

а интервал Δ не содержит точки, сопряженной к точке a на экстремали $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 1$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что экстремаль f может

быть продолжена с сохранением свойства быть экстремалью на более широкий интервал $[c, d]$, $c < a$, $b < d$ (см. теорему 2 Приложения 1). Если число c достаточно близко к a, а число b — к d, то интервал $[c, d]$ не содержит точки, сопряженной к точке c. Докажем это утверждение. Допустим, что оно неверно, тогда будет существовать последовательность таких чисел (c_n), что: 1) $c_n \to a-0$ при $n \to \infty$, 2) последовательность соответствующих сопряженных точек (c_n^*) не удовлетворяет оценке $c_n^* > d$ ни при каком $d > b$. Из подобной последовательности всегда можно выбрать последовательность, у которой свойство 2) заменено более сильным: последовательность (c_n^*) сходится, причем $\lim c_n^* \leqslant b$. Пусть $\varphi : [c, d] \times [c, d] \to \mathbf{R}$ — решение уравнения Якоби, соответствующего экстремали $f : [c, d] \to \mathbf{R}$, которое удовлетворяет начальному условию

$$\varphi(t, t_0) = 0, \quad \varphi_t(t, t_0) = 1.$$

Согласно определению сопряженной точки $\varphi(c_n^*, c_n) = 0$. Так как φ — гладкая функция, то $\varphi(\lim c_n^*, a) = 0$. Таким образом, $\lim c_n^*$ — точка, сопряженная к a, а это противоречит неравенству $\lim c_n^* \leqslant \leqslant b$ и условию теоремы. Итак, можно считать, что интервал $[c, d]$ не содержит точки, сопряженной к точке c.

Рассмотрим теперь решение f_α, $\alpha \in \mathbf{R}$, уравнения Эйлера, удовлетворяющее начальному условию

$$f_\alpha(c) = f(c), \qquad f'_\alpha(c) = f'(c) + \alpha.$$

Согласно теореме 5 Приложения 1, при достаточно малых α, $\alpha \in \delta$, решение f_α определено на интервале $[c, d]$. Покажем, что при подходящем выборе малого интервала δ множество $\tilde{E}$ решений f_α, ограниченных на интервал (c, d), выстилает некоторую область. Таким образом, это множество будет центральным полем, откуда и будет следовать утверждение теоремы. Фиксировав t, $t \in (c, d]$, рассмотрим функцию $\alpha \to f_\alpha(t)$. Ее производная $g(t) = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(t)\right|_{\alpha=0}$ удовлетворяет уравнению Якоби, соответствующему экстремали f и начальному условию

$$g(c) = 0, \qquad g'(c) = 1.$$

Поэтому $g(t) \neq 0$ при $t \in (c, d]$. Согласно теореме об обратной функции заданная на достаточно малом содержащем точку 0 интервале δ_t функция $\alpha \to f_\alpha(t)$ при каждом t обладает следующими свойствами: ее значения пробегают некоторый интервал Δ_t и существует обратная функция. Обозначим обратную функцию $x \to \Phi(t, x)$ так, что $x = f_{\Phi(x, t)}(t)$; число t играет здесь роль параметра. Согласно уточнению к теореме об обратной функции (см. п. 37), в качестве δ_t можно взять любой интервал, на котором выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha} f_\alpha(t) - g(t)\right| < \frac{1}{2}\,|g(t)|.$$

В силу равномерной непрерывности функции $(t, \alpha) \to \frac{\partial}{\partial \alpha} f_\alpha(t)$ на любой ограниченной части области определения существует такой интервал δ, что при $\alpha \in \delta$

$$\sup_{t \in [c, d]} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f_\alpha(t) - g(t) \right| < \frac{1}{2} \inf_{t \in [c, d]} |g(t)|.$$

Положим $\delta_t = \delta$. В качестве области D_1, выстилаемой множеством $\tilde{E}$, возьмем множество точек (t, x), удовлетворяющих условиям $t \in (c, d)$, $x \in \Delta_t$. Через каждую точку области D_1 проходит график экстремали из множества $\tilde{E}$, и притом единственной.

Остается проверить гладкость функции $\tilde{\Phi}: D_1 \to \mathbf{R}$, определенной формулой

$$\tilde{\Phi}(t, x) \to f'_\alpha(t).$$

Здесь α выбрано так, что $x = f_\alpha(t)$, поэтому $\alpha = \Phi(t, x)$. Обратная функция гладко зависит от параметра, если этим свойством обладает прямая функция. Теорема доказана.

104. Сильный экстремум. Рассмотрим множество вектор-функций класса $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ на интервале $\Delta = [a, b]$. Оно является подмножеством пространства $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$, и в качестве нормы элементов этого множества наряду с обычной можно взять норму в $C(\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Обозначим так полученное нормированное пространство через $[C^1](\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Интегральный функционал I на пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ можно рассматривать как функционал на пространстве $[C^1](\Delta \to \mathbf{R}^n)$. Функционал I, вообще говоря, утратит при таком подходе свойство непрерывности, однако точки экстремума могут быть введены без всяких трудностей в согласии с общими определениями. В отличие от обычных точек экстремума функционала I в пространстве $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ точки экстремума функционала I в пространстве $C^1]$ $(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ называют *точками сильного экстремума*. Обычные точки экстремума в $C^1(\Delta \to \mathbf{R}^n)$ иногда называют *точками слабого экстремума*. До сих пор изучались лишь точки слабого экстремума. Точки сильного экстремума являются и точками слабого экстремума.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}_0: \Delta = [a, b] \to \mathbf{R}^n$ — *экстремаль функционала*

$$I(\mathbf{f}) = \int_\Delta L(t, \mathbf{f}(t), \mathbf{f}'(t))\, dt.$$

Если: 1) *существует такая область* D_1, $D_1 \subset \mathbf{R}^{n+1}$, *содержащая график экстремали* $\mathbf{f}_0$, *что при любых* $(t, \mathbf{x}) \in D_1$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ *выполняется оценка*

$$(\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\mathbf{h}, \mathbf{h}) \geqslant \mu(\mathbf{v}) |\mathbf{h}|^2,$$

в которой μ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — *непрерывная функция*, $\mu > 0$, 2) $\mathbf{f}_0$ *может быть погружена в поле экстремалей, то* $\mathbf{f}_0$ *сообщает функционалу* I *сильный минимум на множестве функций* $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in [C^1]$, *удовлетворяющих условиям*

$$\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}_0(a), \qquad \mathbf{f}(b) = \mathbf{f}_0(b). \qquad (10)$$

Согласно предыдущему пункту геометрическое условие 2) можно заменить аналитическим: 2′) *интервал* $[a, b]$ *не содержит точек, сопряженных к точке* a *на экстремали* $\mathbf{f}_0$.

В зависимости от того, принято условие 2) или 2′), будем говорить *о геометрическом или аналитическом варианте достаточных условий сильного экстремума.* Аналитический вариант отличается от полученных в п. 26 достаточных условий слабого экстремума лишь некоторым ужесточением условия 1).

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что область D_1, фигурирующая в условии 1), выстлана полем экстремалей, в которое погружена экстремаль $\mathbf{f}_0$. Можно считать также, что D_1 односвязна. Пусть $\tilde{\Phi}: D_1 \to \mathbf{R}^n$ — наклон поля. Рассмотрим не зависящий от выбора кривой интеграл

$$\tilde{I} = \int_{(a,\, \mathbf{f}_0(a))}^{(b,\, \mathbf{f}_0(b))} \left[-H^{\Phi}(\xi)\, dt + \left(p^{\Phi}(\xi),\ d\mathbf{x}\right)\right].$$

Рассмотрим его на кривой, заданной уравнением $\mathbf{x} = \mathbf{f}_0(t)$:

$$\tilde{I} = \int_\Delta \left[-H^{\Phi}(t,\ \mathbf{f}_0(t)) + \left(p^{\Phi}(t,\ \mathbf{f}_0(t)),\ \mathbf{f}_0'(t)\right)\right] dt.$$

Подставляя выражения для функций H^{Φ} и p^{Φ}, получим

$$\tilde{I} = \int_\Delta L(t,\ \mathbf{f}_0,\ (t),\ \mathbf{f}_0'(t))\, dt = I(\mathbf{f}_0).$$

Пусть функция $\mathbf{f} \in [C^1](\Delta \to \mathbf{R}^n)$ удовлетворяет условиям (10). Образуем разность

$$I(\mathbf{f}) - I(\mathbf{f}_0) = I(\mathbf{f}) - \tilde{I}$$

и проинтегрируем в $\tilde{I}$ по кривой, заданной уравнением $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$. Тогда

$$\begin{gathered} I(\mathbf{f}) - I(\mathbf{f}_0) = \int_\Delta [L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)) + \\ + \hat{H}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t))) - (\hat{p}(t,\ \mathbf{f}(t),\ \tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t))),\ \mathbf{f}'(t))]\, dt = \\ = \int_\Delta [L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \mathbf{f}'(t)) - L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t))) - \\ - (\nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{f}(t),\ \tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t))),\ \mathbf{f}'(t) - \tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t)))]\, dt. \end{gathered}$$

Формула Тейлора для функции на $\mathbf{R}^n$ дает

$$\begin{gathered} L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}+\mathbf{h}) - L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}) - (\nabla_{\mathbf{v}} L(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}),\ \mathbf{h}) = \\ = \int_0^1 (1-\tau)(\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{v}+\tau\mathbf{h})\,\mathbf{h},\ \mathbf{h})\, d\tau \geqslant \int_0^1 \mu(\mathbf{v}+\tau\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|^2\, d\tau. \end{gathered}$$

Отсюда следует

$$I(\mathbf{f}) - I(\mathbf{f}_0) \geqslant \int_\Delta dt \int_0^1 d\tau\, \mu(\tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}(t)) + \tau\mathbf{h}(t)) \|\mathbf{h}(t)\|^2, \quad \mathbf{h} = \mathbf{f}' - \tilde{\Phi}(t,\ \mathbf{f}).$$

Теорема доказана.

Примеры. Пусть $L(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = l(t, \mathbf{x})(1+\mathbf{v}^2)^{1/2}$, $l > 0$. Тогда

$$L_{v_i v_j}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = l(t, \mathbf{x}) \frac{(1+\mathbf{v}^2)\delta_{ij} - v_i v_j}{(1+\mathbf{v}^2)^{3/2}}$$

и

$$(\nabla_{\mathbf{v}} L_{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})\mathbf{h}, \mathbf{h}) = l(t, \mathbf{x}) \frac{(1+\mathbf{v}^2)\|\mathbf{h}\|^2 - (\mathbf{v}, \mathbf{h})^2}{(1+\mathbf{v}^2)^{3/2}} \geqslant$$

$$\geqslant l(t, \mathbf{x})(1+\mathbf{v}^2)^{-3/2}\|\mathbf{h}\|^2.$$

Таким образом, для рассматриваемого функционала I аналитический вариант достаточных условий сильного экстремума и полученные в п. 26 достаточные условия слабого экстремума совпадают. На практике иногда бывает выгоднее пользоваться геометрическим вариантом.

Пусть $n=1$ и $l(t, x) = x^{-1}$ (см. п. 16, пример 1) и п. 28). В этом случае графики экстремалей — отрезки полуокружностей произвольного радиуса с центрами на оси t. Всякую экстремаль

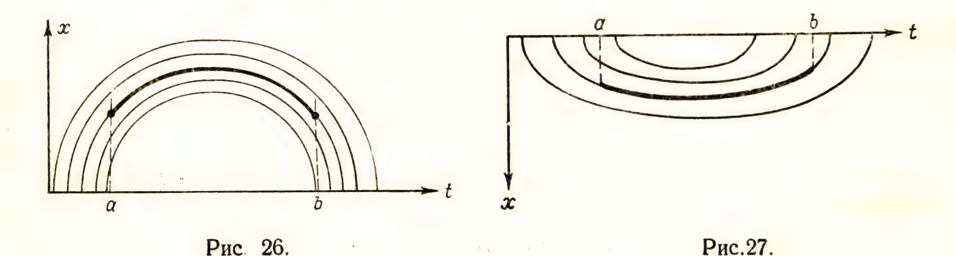


Рис. 26. Рис. 27.

можно погрузить в поле экстремалей. Простейшим примером такого поля может служить множество экстремалей, которые получаются из заданной варьированием радиуса окружности (рис. 26).

Пусть $n=1$ и $l(t, x) = x^{-1/2}$ (п. 16, пример 2) и п. 28) (задача о брахистохроне). В этом случае графики экстремалей — отрезки циклоид. Всякую экстремаль можно погрузить в поле экстремалей, варьируя радиус окружности, точка которой описывает циклоиду (рис. 27).

105. Уравнение Гамильтона — Якоби. Первообразная S формы Ω, отвечающей майеровой поверхности, характеризуется, как было показано в п. 100, уравнением Гамильтона — Якоби

$$S_t + H(t, \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} S) = 0. \tag{11}$$

Это уравнение является уравнением в частных производных первого порядка. Из сказанного выше следует, что существует тесная связь между задачами интегрирования уравнения Гамильтона — Якоби и уравнений Гамильтона. Выше эта связь была изложена на геометрическом языке. В настоящем и следующем пунктах некоторые стороны указанной связи будут описаны аналитически.

1) З а д а ч а К о ш и д л я у р а в н е н и я Г а м и л ь т о н а — Я к о б и с н а ч а л ь н ы м у с л о в и е м н а п л о с к о с т и $t=t_0$ состоит в отыскании решения уравнения (11), удовлетворяющего условию

$$S(t, \mathbf{x})|_{t=t_0} = S_0(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in D, \qquad (12)$$

где $S_0 : D \to \mathbf{R}$ — заданная функция; D — область в $\mathbf{R}^n$. При решении задачи подлежит описанию и область $D_1 \subset \mathbf{R}^{n+1}$, на которой решение S однозначно определяется начальным условием.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ с точками $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ лагранжеву поверхность Γ вида

$$\mathbf{p} = \nabla S_0(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in D.$$

Введем обычным образом лагранжевы поверхности Γ_t, в которые переходит $\Gamma = \Gamma_{t_0}$ при движении, порождаемом уравнениями Гамильтона. Предположим, что лагранжевы поверхности Γ_t при $t \in \Delta$,

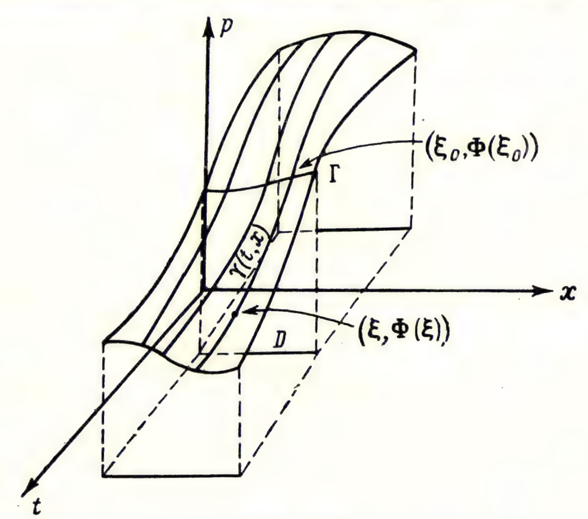


Рис. 28.

где Δ — интервал, содержащий точку t_0, правильно проектируются на конфигурационное пространство. Это значит, что лагранжева поверхность Γ_t, $t \in \Delta$, имеет вид

$$\mathbf{p} = \Phi_t(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in D_t,$$

D_t — область в $\mathbf{R}^n$. Майерова поверхность M

$$\mathbf{p} = \Phi_t(\mathbf{x}), \ (t, \mathbf{x}) \in D_1 = \{t, \mathbf{x} : \mathbf{x} \in D_t, \ t \in \Delta\},$$

выстланная поверхностями Γ_t, такова, что отвечающая ей форма Ω имеет первообразную $S : D_1 \to \mathbf{R}$. Убедимся в этом. Поверхность M выстилается экстремалями функционала J. Рассмотрим часть M, майерову поверхность M_0, выстланную экстремалями, проходящими через окрестность u точки $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 \in D$, содержащуюся в D (рис. 28).

Область D_0, над которой расположена майерова поверхность M_0, *односвязна*, так как представляет собою *непрерывную деформацию* цилиндра $\{(t, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in u, \ t \in \Delta\}$. Следовательно, форма Ω имеет на D_0 первообразную S, причем

$$S(t, \mathbf{x}) = S_0(\mathbf{x}_0) + \int_{\gamma(t, \mathbf{x})} \Omega,$$

где $\gamma(\xi)$ — отрезок экстремали, соединяющий точки $(\xi_0, \Phi(\xi_0)) \in \Gamma$ и $(\xi, \Phi(\xi))$. Функцию S можно определить последней формулой всюду на D_1. Так как соотношение $dS = \Omega$ установлено в любой области вида D_0, то функция S — первообразная формы Ω всюду на D_1. Следовательно, S — решение уравнения Гамильтона — Якоби. Очевидно, что $S(t_0, \mathbf{x}) = S_0(\mathbf{x})$.

Любое решение уравнения Гамильтона — Якоби, удовлетворяющее условию (12) и заданное на D_1, должно получаться с помощью изложенной конструкции, ибо по такому решению восстанавливаются все элементы конструкции. Следовательно, на D_1 поставленная задача Коши имеет единственное решение.

В заключение отметим, что при достижении таких t, для которых Γ_t утрачивает свойство быть правильно проектируемой, решение задачи Коши перестает существовать. Практически это, как правило, проявляется в том, что его производные при приближении к таким t в некоторых точках обращаются в бесконечность.

2) Задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби с постоянным начальным условием состоит в отыскании решения уравнения (11), удовлетворяющего условию

$$S(t, \mathbf{x})|_{\Gamma} = S_0,$$

где S_0 — число, а Γ — некоторая n-мерная поверхность в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Рассматривая эту задачу, будем считать, что функция H допускает преобразование Лежандра $H \to L$ по последнему аргументу. Предположим, кроме того, что на Γ можно задать гладкое отображение $V : \Gamma \to \mathbf{R}^n$, такое, что вектор $(-\hat{H}(t, \mathbf{x}, V(t, \mathbf{x})), \hat{p}(t, \mathbf{x}, V(t, \mathbf{x})))$ ортогонален к Γ в точке $(t, \mathbf{x})$. Рассмотрим множество $\tilde{E}$ экстремалей $\mathbf{f}$ функционала I, удовлетворяющих начальным условиям

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{x}, \quad \mathbf{f}'(t) = V(t, \mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in \Gamma.$$

Пусть $\tilde{E}$ выстилает некоторую область D_1. Множество $\tilde{E}$ является полем экстремалей. Соответствующая форма $\tilde{\Omega}$ имеет на D_1 первообразную, которую согласно п. 99 можно задать формулой

$$S(t, \mathbf{x}) = S_0 + \int_{\gamma(t, \mathbf{x})} \tilde{\Omega},$$

где $\gamma(t, \mathbf{x})$ — отрезок экстремали между точками $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Gamma$ и $(t, \mathbf{x}) \in D_1$. Так как $\tilde{\Omega} = \Omega$, то функция S является первообразной формы Ω и, таким образом, удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби. Очевидно, что $S = S_0$ при $(t, \mathbf{x}) \in \Gamma$.

3) В п. 93 было объявлено, что всякое решение $S:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ уравнения

$$H(\nabla S)=0$$

($H:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — заданная функция) удовлетворяет соотношению

$$S(\mathbf{x}+\boldsymbol{\nu})=S(\mathbf{x})+(\boldsymbol{\nu},\ \mathbf{p}),$$

где $\boldsymbol{\nu}=\lambda\nabla H(\mathbf{p})$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mathbf{p}=\nabla S(\mathbf{x})$. Обозначения, использованные здесь и в п. 93, не тождественны, но мы надеемся, что это обстоятельство не затруднит читателя.

Для доказательства рассмотрим функцию H как функцию Гамильтона и введем уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-H(\nabla S).$$

Функция S удовлетворяет уравнению $H(\nabla S)=0$ тогда и только тогда, когда она является не зависящим от t решением уравнения Гамильтона — Якоби. Пусть S — подобное решение. Проведем через точку $(t=0,\ \mathbf{x})$ поверхность Γ, на которой $S(t,\ \mathbf{x})=\mathrm{const}$ (рис. 29), где изображено сечение Γ_0 этой поверхности плоскостью $t=0$. Поверхность Γ представляет собою цилиндр, образующие которого параллельны оси t. Каноническая система имеет вид

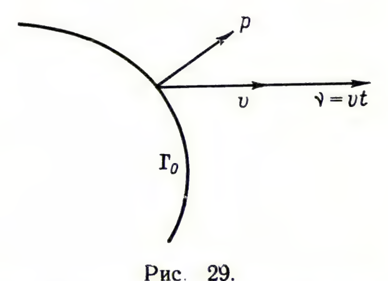


Рис. 29.

$$\mathbf{f}'=\nabla H(\mathbf{g}),\qquad \mathbf{g}'=0,$$

так что экстремали соответствующего функционала — линейные функции

$$\mathbf{f}(t)=\mathbf{v}t+\boldsymbol{\xi},$$

$\mathbf{v},\ \boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^n$ произвольны. Условие трансверсальности в точке $(0,\ \mathbf{x})$ означает, что

$$(-H(\mathbf{p}),\ \mathbf{p})=\mu(0,\ \mathbf{n}(\mathbf{x}));$$

здесь $\mathbf{p}=\nabla L(\mathbf{v})$; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — вектор нормали к Γ_0 в точке $\mathbf{x}$. Таким образом, $H(\mathbf{p})=0$ и $\mathbf{p}=\mu\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Эти условия определяют векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}:\mathbf{v}=\nabla H(\mathbf{p})$, причем $\mathbf{p}=\nabla S(\mathbf{x})$. Функция $S(\mathbf{x}+\boldsymbol{\nu})$ может быть вычислена по формуле

$$S(\mathbf{x}+\boldsymbol{\nu})=S(\mathbf{x})+\int_0^t L(\mathbf{v})\,dt=S(\mathbf{x})+L(\mathbf{v})\,t.$$

Так как $H(\mathbf{p})=0$, то $L(\mathbf{v})=-H(\mathbf{p})+(\mathbf{p},\ \mathbf{v})=(\mathbf{p},\ \mathbf{v})$. Кроме того, $\boldsymbol{\nu}=\mathbf{v}t$ и, следовательно,

$$S(\mathbf{x}+\boldsymbol{\nu})=S(\mathbf{x})+(\mathbf{p},\ \mathbf{v})\,t=S(\mathbf{x})+(\mathbf{p},\ \boldsymbol{\nu}),$$

что и требовалось.

106. Теорема Якоби. Пусть S_1 и S_2 — решения уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial S(t, \mathbf{x})}{\partial t} + H(t, \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})) = 0.$$

Допустим, что майеровы поверхности M_1 и M_2, описываемые уравнениями

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} S_1(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} S_2(t, \mathbf{x}),$$

пересекаются по некоторой кривой, которая является графиком вектор-фукции $(\mathbf{f}, \mathbf{g}): \Delta \to \mathbf{R}^{2n}$. Это предположение согласовано с числом переменных и числом соотношений:

$$\nabla_{\mathbf{x}} S_1(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} S_2(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x}),$$

выражающих условия пересечения. Так как каждая майерова поверхность может быть выстлана решениями канонических уравнений и через каждую точку $(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ проходит график единственного решения, то построенная вектор-функция $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона. Соотношение $\nabla_{\mathbf{x}} S_1(t, \mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} S_2(t, \mathbf{x})$ в силу уравнения Гамильтона — Якоби приводит к соотношению $S_{1t}(t, \mathbf{x}) = S_{2t}(t, \mathbf{x})$. Подставляя в эти равенства $\mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$, умножая первое скалярно на $\mathbf{f}'(t)$ и складывая после этого первое со вторым, получим

$$\frac{d}{dt} S_1(t, \mathbf{f}(t)) = \frac{d}{dt} S_2(t, \mathbf{f}(t)).$$

Мы убедились, таким образом, что функция $S_1(t, \mathbf{f}(t)) - S_2(t, \mathbf{f}(t))$ не зависит от t.

Пусть теперь $S(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$ — зависящее от параметра $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ решение уравнения Гамильтона — Якоби. Уравнения

$$\nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

могут в этом случае определить $2n$-параметрическое множество решений канонических уравнений, иначе говоря, общее решение канонических уравнений $t \to (\mathbf{f}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \mathbf{g}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))$. Такое общее решение локально заведомо может быть построено, если

$$\det\left\{S_{x_i \alpha_j}(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})\right\} \neq 0.$$

Зависящее от n параметров решение уравнения Гамильтона — Якоби, удовлетворяющее последнему условию, называется полным интегралом уравнения Гамильтона — Якоби.

Итак, пусть задан полный интеграл. Выше было показано, что функция

$$S(t, \mathbf{f}(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\alpha}) - S(t, f(t, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \boldsymbol{\beta}) = F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

не зависит от t. Продифференцируем ее по α:

$$(\nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{f}_{\alpha_i}) + S_{\alpha_i}(t, \mathbf{f}, \boldsymbol{\alpha}) - (\nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{f}, \boldsymbol{\beta}), \mathbf{f}_{\alpha_i}) = F_{\alpha_i}.$$

Скалярные произведения сокращаются в силу уравнений, определяющих функцию $\mathbf{f}(t, \alpha, \beta)$:

$$S_{\alpha_i}(t, \mathbf{f}(t, \alpha, \beta), \alpha) = F_{\alpha_i}$$

или

$$\nabla_\alpha S(t, \mathbf{f}, \alpha) = \gamma,$$

где $\gamma = \nabla_\alpha F(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^n$. Если S — полный интеграл, то можно, считая γ произвольным, использовать последнее соотношение для того, чтобы найти $2n$-параметрическое множество решений канонических уравнений.

Теорема (Якоби). *Пусть S — первый интеграл уравнения Гамильтона — Якоби. Тогда n-параметрическое множество вектор-функций $\nabla_\alpha S(t, \mathbf{x}, \alpha)$ есть множество первых интегралов уравнения Эйлера $L[\mathbf{f}] = 0$, по которому можно построить общее решение $t \to \mathbf{f}(t, \alpha, \gamma)$ уравнения Эйлера*

$$\nabla_\alpha S(t, \mathbf{f}(t, \alpha, \gamma), \alpha) = \gamma.$$

Дополненное соотношениями $\mathbf{p} = \nabla_\mathbf{x} S(t, \mathbf{f}(t, \alpha, \gamma), \alpha)$, оно определяет общее решение канонической системы.

Отметим, что зависимость функции $f(t, \alpha, \gamma)$ от третьего аргумента в построениях, предшествующих теореме, и в формулировке теоремы определяется разными соотношениями и потому различна.

Хотя казалось бы теорема Якоби сводит более простую задачу (задача отыскания решений обыкновенных дифференциальных уравнений) к более сложной задаче (задача отыскания решений уравнения в частных производных), на практике она оказывается весьма эффективным методом точного интегрирования уравнений механики. В курсах механики читатель найдет много примеров, демонстрирующих приложения теоремы Якоби. Некоторые важные задачи, которые не поддаются решению никакими другими методами, удается проинтегрировать с помощью теоремы Якоби.

В. ПОЛЯ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ НА КРИВЫХ

Теория полей экстремалей для функционалов на кривых имеет ряд особенностей. Отсутствие выделенного параметра делает ее в некоторых отношениях более симметричной. Здесь будут кратко даны основные положения этой теории. Доказательства предложений, аналогичных предложениям изложенной выше теории, будут опускаться.

107. Преобразование Лежандра. Интегральный функционал J на кривых определяется формулой

$$J(\gamma) = \int_\Delta F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))\, d\tau,$$

где $F(z, w)$ — гладкая функция на множестве $\{(z, w) : z, w \in \mathbf{R}^m, w \neq 0\}$, удовлетворяющая условию однородности

$$F(z, \lambda w) = F(z, w)\,|\lambda|.$$

Как обычно, будет предполагаться также, что $F(z, w) > 0$ при $w \neq 0$.

Так как $w \to F(z, w)$ — однородная функция степени 1, то отображение

$$w \to \nabla_w F(z, w)$$

— однородное отображение степени 0: $\nabla_w F(z, \lambda w) = \nabla_w F(z, w) \operatorname{sign} \lambda$. Следовательно, отображение $w \to \nabla_w F(z, w)$ не обратимо и, значит, *функция* $w \to F(z, w)$ *не допускает преобразования Лежандра.* Этого недостатка лишена функция $w \to L(z, w) = \frac{1}{2} F^2(z, w)$, однородная функция степени 2. Отображение

$$w \to \nabla_w L(z, w) = F(z, w) \nabla_w F(z, w)$$

— однородное отображение степени 1:

$$F(z, \lambda w) \nabla_w F(z, \lambda w) = F(z, w) \nabla_w F(z, w) \lambda.$$

Допустим, что образ этого отображения совпадает с $\mathbf{R}^m$ и оно обратимо. Обозначим обратное через $K(z, \cdot)$, оно также однородное отображение степени 1. Выполняются соотношения

$$F(z, K(z, p)) \nabla_w F(z, K(z, p)) = p, \quad p \in \mathbf{R}^m, \tag{13}$$

$$K(z, F(z, w) \nabla_w F(z, w)) = F(z, w) K(z, \nabla_w F(z, w)) = w, \quad w \in \mathbf{R}^m. \tag{14}$$

Функция $H(z, \cdot)$, двойственная по Юнгу к функции $L(z, \cdot)$, равна

$$H(z, p) = -\frac{1}{2} F^2(z, w) + (w, p), \text{ где } w = K(z, p).$$

Благодаря однородности функции $L(z, \cdot)$ имеет место тождество

$$(F(z, w) \nabla_w F(z, w), w) = F^2(z, w),$$

поэтому

$$H(z, w) = -\frac{1}{2} F^2(z, w) + (w, F(z, w) \nabla_w F(z, w)) =$$

$$= -\frac{1}{2} F^2(z, w) + F^2(z, w) = \frac{1}{2} F^2(z, w), \text{ где } w = K(z, p).$$

Положим

$$\Lambda(z, p) = F(z, K(z, p)),$$

тогда

$$H = \frac{1}{2} \Lambda^2.$$

Ясно, что $p \to \Lambda(z, p)$ — однородная функция степени 1 : $\Lambda(z, \lambda p) = \Lambda(z, p) |\lambda|$, поэтому $p \to H(z, p)$ — однородная функция степени 2.

Пример 1. Пусть $F(z, w) = (A(z)w, w)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\nabla_w L(z, w) = A(z)w$ и $K(z, p) = A^{-1}(z)p$. Следовательно,

$$\Lambda(z, p) = (A^{-1}(z)p, p)^{1/2} \quad \text{и} \quad H(z, p) = \frac{1}{2}(A^{-1}(z)p, p)^{1/2}.$$

Охарактеризуем образ отображения $w \to \nabla_w F(z, w)$. Обозначим его через $\Gamma_p(z)$. *Множество* $\Gamma_p(z)$ *совпадает с множеством векторов* p, *удовлетворяющих соотношению*

$$\Lambda(z, p) = 1.$$

В самом деле, если $p = \nabla_w F(z, w)$, то согласно (14)

$$\Lambda(z, p) = F(z, K(z, \nabla_w F(z, w))) = F\left(z, \frac{w}{F(z, w)}\right) = \\ = F^{-1}(z, w)F(z, w) = 1.$$

Обратно, пусть $\Lambda(z, p) = 1$, тогда согласно (13) $\nabla_w F(z, K(z, p)) = p$, $w = K(z, p)$, $\nabla_w F(z, w) = p$.

Хотя вектор $p = \nabla_w F(z, w)$ не определяет вектора w, он определяет его направление. Из (14) следует

$$w = F(z, w)K(z, p), \tag{15}$$

так что направление вектора w совпадает с направлением $K(z, p)$. Введя условие нормировки, условие на длину вектора w, можно определить вектор w полностью. Если потребовать

$$F(z, w) = 1,$$

то (15) дает

$$w = K(z, p).$$

Обозначим множество векторов w, удовлетворяющих соотношению $F(z, w) = 1$, через $\Gamma_w(z)$. Ограниченное на $\Gamma_w(z)$ отображение $w \to \nabla_w F(z, w)$ совпадает с отображением $w \to \nabla_w L(z, w)$. Его образ есть $\Gamma_p(z)$, оно обратимо и обратное совпадает с отображением $p \to K(z, p)$, ограниченным на $\Gamma_p(z)$.

Пример 2. Для функции F, рассмотренной в предыдущем примере, множества $\Gamma_w(z)$ и $\Gamma_p(z)$ состоят из векторов w и p, удовлетворяющих соотношениям $(A(z)w, w) = 1$ и $(A^{-1}(z)p, p) = 1$.

108. Поля экстремалей. *Будем говорить, что* $(m-1)$*-параметрическое множество* E *кривых в* $\mathbf{R}^m$ *выстилает область* D, $D \subset \mathbf{R}^m$, *если:*

1) *через каждую точку области* D *проходит, и притом единственная, кривая из множества* E;

2) *существует такое гладкое отображение* $\Phi: D \to \mathbf{R}^m$, *что* $\Phi(z)$ — *ненулевой вектор, касательный в точке* z *к кривой* γ, $\gamma \in E$, *проходящей через точку* z.

Если Φ_0 — какое-либо отображение, удовлетворяющее условию 2), то отображение $z \to \Phi(z) = a(z)\Phi_0(z)$, где a — гладкая функ-

ция $D \to \mathbf{R}$, сохраняющая знак, также удовлетворяет условию 2). Функция a, а вместе с нею и отображение Φ, фиксируется с точностью до знака условием нормировки $F(z, \Phi(z)) = 1$:

$$F(z, \Phi(z)) = |a(z)| F(z, \Phi_0(z)) = 1.$$

Таким образом, множеству E кривых, выстилающих область D, соответствуют два отображения Φ (Φ и $-\Phi$), подчиненных условию нормировки $F(z, \Phi(z)) = 1$.

По отображению Φ множество E можно восстановить, решая уравнение

$$\zeta'(\tau) = \Phi(\zeta(\tau)) \quad \text{или} \quad \zeta'(\tau) = -\Phi(\zeta(\tau)).$$

m-параметрическое множество решений этого уравнения есть множество параметризованных кривых, нормированных параметризацией множества E. Здесь, как и в разделе А, параметризованные кривые считаются заданными на открытых интервалах.

Доказательства ближайших утверждений лишь незначительными деталями отличаются от доказательств аналогичных предложений из раздела А.

Отображение Φ определяет на D форму Ω

$$\Omega(z, dz) = (\nabla_w F(z, \Phi(z)), dz).$$

Множеству E кривых, выстилающих область, соответствуют два нормированных отображения Φ и тем самым две формы Ω, отличающиеся знаком. *Если форма Ω замкнута, то множество E состоит из экстремалей функционала J.* В этом случае отображение Φ называется *наклоном поля*, а множество E — *полем экстремалей.* При $m = 2$ всякое множество E, выстилающее область, является полем.

Напомним определение. *Кривая γ пересекает гиперповерхность Γ трансверсально, если вектор $\nabla_w F(z, w)$, где z — точка пересечения, w — касательный в точке z к кривой γ вектор, направлен по вектору нормали $N(z)$ к гиперповерхности Γ в точке z*: $\nabla_w F(z, w) = \lambda N(z)$.

Пример. При $F(z, w) = (A(z)w, w)^{\frac{1}{2}}$ условие $\nabla_w F(z, w) = \lambda N(z)$ имеет вид $A(z)w = (A(z)w, w)^{\frac{1}{2}} \lambda N(z)$ или $w = \lambda A^{-1}(z) N(z)$.

Множество экстремалей, выстилающих область D и состоящее из кривых, трансверсально пересекающих некоторую гиперповерхность Γ, является полем экстремалей. Экстремали, проходящие через фиксированную точку z_0, выстилают некоторую область D, например, достаточно малую окрестность точки z_0, из которой удалена сама точка z_0. *Это множество экстремалей является полем экстремалей, оно называется центральным полем экстремалей, точка z_0 — его центром.* Пусть множество E экстремалей выстилает область D. Расположенная в D гиперповерхность Γ называется *трансверсалью* множества E, если экстремали мно-

жества E пересекают Γ трансверсально. *Для того чтобы множество было полем экстремалей, необходимо и достаточно, чтобы через каждую точку области D можно было провести трансверсаль множества E.*

109. Уравнение Гамильтона — Якоби. Тот факт, что экстремали, трансверсально пересекающие гиперповерхность Γ или проходящие через фиксированную точку z_0, образуют поле, доказывается построением функции $\theta : D \to \mathbf{R}$, дифференциал которой равен $\Omega : d\theta = \Omega$. Функция θ дается интегралом

$$\theta(z) = J(\gamma(z)),$$

где $\gamma(z)$ — экстремаль, одна граничная точка которой лежит на Γ или равна z_0, а другая — z. На гиперповерхности Γ функция θ равна нулю, вне Γ θ — гладкая положительная функция. Если $F(z, w) = \|w\|$, то $\theta(z)$ есть расстояние от Γ до z. Используя формулу для производной функционала J, (п. 72) и повторяя построения п. 99, легко показать, что

$$\nabla\theta(z) = \nabla_w F(z, \Phi(z)).$$

При таком доказательстве неясно, как обстоит дело на самой гиперповерхности Γ. Если, однако, положить $\theta(z) = J(\gamma(z))$ по одну сторону от Γ и $\theta(z) = -J(\gamma(z))$ — по другую, то θ окажется гладкой функцией и на самой гиперповерхности Γ, где также будет выполняться последнее равенство. В этом случае при $F(z, w) = \|w\|$ θ есть расстояние от Γ до z по нормали к Γ, взятое со знаком.

Для того чтобы функция $\theta : D \to \mathbf{R}$ была первообразной формы Ω, необходимо и достаточно, чтобы θ удовлетворяла соотношению

$$\Lambda(z, \nabla\theta(z)) = 1, \tag{16}$$

которое аналогично уравнению Гамильтона — Якоби, введенному в п. 100, и также называется *уравнением Гамильтона — Якоби.*

Необходимость ясна, так как $\Lambda(z, \nabla_w F(z, w)) = 1$ (см. п. 107). Достаточность: пусть выполнено (16), положим

$$\Phi(z) = K(z, \nabla\theta(z)),$$

тогда $F(z, \Phi(z)) = 1$ и $\nabla\theta(z) = \nabla_w F(z, \Phi(z))$ (см. п. 107), форма Ω

$$\Omega(z, dz) = (\nabla_w F(z, \Phi(z)), dz),$$

есть дифференциал θ

$$\Omega(z, dz) = (\nabla\theta(z), dz) = d\theta(z; dz).$$

По функции θ экстремали поля можно найти, решая дифференциальное уравнение

$$\zeta'(\tau) = K(\zeta(\tau), \nabla\theta(\zeta(\tau))) = \Phi(\zeta(\tau)) \quad \text{или} \quad \zeta'(\tau) = -\Phi(\zeta(\tau)).$$

Решения этого уравнения удовлетворяют условию нормировки

$$F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)) = 1.$$

Форма Ω определяет функцию θ с точностью до аддитивной постоянной, поле экстремалей определяет функцию θ с точностью до аддитивной постоянной и с точностью до знака. Нормировка не определяет параметризацию экстремали однозначно: если ζ_0 — параметризация, удовлетворяющая условию нормировки, то $\zeta(\tau) = \zeta_0(\tau - \alpha)$ и $\zeta(\tau) = \zeta(-\tau - \alpha)$ — параметризация той же кривой, также удовлетворяющая условию нормировки.

Параметризацию ζ экстремали γ, принадлежащей полю E, форма Ω которого имеет первообразную θ, можно выбрать так, что будет выполняться соотношение

$$\theta(\zeta(\tau)) = \tau. \tag{17}$$

Это соотношение фиксирует параметризацию однозначно, причем удовлетворяется и условие нормировки.

Убедимся в этом. Пусть параметризация кривых множества E удовлетворяет уравнению

$$\zeta' = \Phi(\zeta), \quad \Phi(\zeta) = K(\zeta, \nabla\theta(\zeta)).$$

Пусть $\gamma \in E$. За счет сдвига параметр всегда можно выбрать так, что при некотором значении τ_0 будет справедливо равенство

$$\theta(\zeta(\tau_0)) = \tau_0.$$

Вычислим $\theta(\zeta(\tau))$. Согласно определению

$$\theta(\zeta(\tau)) = \theta(\zeta(\tau_0)) + \int_{\zeta(\tau_0)}^{\zeta(\tau)} (\nabla_w F(z, \Phi(z)), dz).$$

Введем в интеграле естественную параметризацию

$$\theta(\zeta(\tau)) = \theta(\zeta(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} (\nabla_w F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau)), \zeta'(\tau))\, d\tau$$

и воспользуемся тождеством $(\nabla_w F(z, w), w) = F(z, w)$, тогда

$$\theta(\zeta(\tau)) = \theta(\zeta(\tau_0)) + \int_{\tau_0}^{\tau} F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))\, d\tau.$$

Так как параметризация ζ нормирована, то

$$\theta(\zeta(\tau)) = \theta(\zeta(\tau_0)) + (\tau - \tau_0) = \tau.$$

Параметризация, удовлетворяющая соотношению (17), построена. Читатель без труда установит ее единственность.

Пример. Пусть $F(z, w) = (A(z)w, w)^{1/2}$. Уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$(A^{-1}(z)\nabla\theta(z), \nabla\theta(z))^{1/2} = 1.$$

В частном случае $A(z) = l^2(z) I$ (функционал Ферма) это уравнение

$$\|\nabla\theta(z)\| = l(z)$$

называют *уравнением эйконала*. (Эйконал в переводе с греческого означает изображение.) Уравнение эйконала, простейшее уравнение Гамильтона — Якоби, впервые появилось в оптике. Отметим, что уравнению $(\nabla\theta(z))^2 = 1$ удовлетворяет функция, равная расстоянию от переменной точки до фиксированной

гиперповерхности. Условие нормировки и дифференциальное уравнение имеют в рассматриваемом примере вид

$$(A(\zeta)\zeta', \zeta')=1, \quad \zeta'(\tau)=A^{-1}(\zeta(\tau))\nabla\theta(\zeta(\tau)),$$

при $A(z)=l^2(z)I$

$$l(\zeta)\|\zeta'\|=1, \quad \zeta'(t)=l^{-2}(\zeta(\tau))\nabla\theta(\zeta(\tau)).$$

Геометрическая терминология, введенная в п. 99, используется и для функционалов на кривых, вместо слов «*графики экстремали*» теперь следует говорить просто «*экстремаль*».

В заключение отметим, что задача Коши для уравнения Гамильтона — Якоби

$$\Lambda(z, \nabla\theta(z))=1, \quad \theta|_\Gamma=\theta_0,$$

где Γ — гиперповерхность, а θ_0 — заданное число, может быть решена построением поля экстремалей, трансверсально пересекающих Γ, и вычислением θ по формуле $\theta(z)=J(\gamma(z))+\theta_0$.

110. Уравнения Гамильтона. Экстремали функционала J, параметризации ζ которых нормированы условием $F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))=1$, являются экстремалями функционала

$$I(\zeta)=\int_\Delta L(\zeta(t), \zeta'(t))\,dt$$

(см. п. 74). *Уравнение Эйлера* $L[\zeta]=0$ *для функционала* I *равносильно уравнениям Гамильтона*

$$f'=\nabla_p H(f, g), \quad g'=-\nabla_z H(f, g).$$

Функция H — первый интеграл этих уравнений.

Пример. Пусть $F(z, w)=l(z)\|w\|$, тогда $H(z, p)=\frac{1}{2}l^{-2}(z)p^2$. Уравнения Гамильтона имеют вид

$$f'=l^{-2}(f)g, \quad g'=\frac{\nabla l(f)}{l^3(f)}g^2.$$

Уравнение Гамильтона — Якоби для функционала I имеет вид

$$S_t(t, z)=-H(z, \nabla_z S(t, z)). \tag{18}$$

Сравним значение функционала I на какой-либо его экстремали $\zeta:\Delta=[a, b]\to\mathbf{R}^m$ и значение функционала J на экстремали γ, параметризацией которой является ζ. На экстремали ζ функция $t\to F(\zeta(t), \zeta'(t))$ постоянна, поэтому

$$I(\zeta)=\frac{1}{2}F^2(\zeta(t), \zeta'(t))\,|\Delta|,$$

$$J(\gamma)=\int_\Delta F(\zeta(\tau), \zeta'(\tau))\,d\tau=F(\zeta(t), \zeta'(t))\,|\Delta|.$$

Сравнивая эти формулы, получаем

$$I(\zeta)=\frac{1}{2}J^2(\gamma)\,|\Delta|^{-1}.$$

Между полями экстремалей функционала I и полями экстремалей функционала J существует простая связь. Ее легче всего описать в терминах реше-

ний уравнений Гамильтона — Якоби. На функциях $S : \mathbf{R} \setminus \{0\} \times D \to \mathbf{R}$, $D \subset \subset \mathbf{R}^m$, вида

$$S(t, z) = \frac{1}{2} \frac{\theta^2(z)}{t} \tag{19}$$

уравнение Гамильтона — Якоби (18) эквивалентно уравнению Гамильтона — Якоби $\Lambda(z, \nabla\theta(z)) = 1$. В самом деле,

$$S_t(t, z) = -\frac{1}{2} \frac{\theta^2(z)}{t^2},$$

$$H(z, \nabla_z S(t, z)) = H\left(z, \frac{\theta(z)}{t} \nabla\theta(z)\right) =$$

$$= \frac{\theta^2(z)}{t^2} H(z, \nabla\theta(z)) = \frac{\theta^2(z)}{t^2} \frac{1}{2} \Lambda^2(z, \nabla\theta(z))$$

и уравнение (18) принимает вид

$$-\frac{1}{2} \frac{\theta^2(z)}{t^2} = -\frac{\theta^2(z)}{t^2} \frac{1}{2} \Lambda^2(z, \nabla\theta(z)),$$

что равносильно уравнению $\Lambda(z, \nabla\theta(z)) = 1$. Таким образом, изучение полей экстремалей функционала J, форма Ω которых имеет первообразную θ, равносильно изучению полей экстремалей функционала I, форма Ω которых имеет первообразную S вида (19).

Пусть $\Phi : D \to \mathbf{R}^m$ — наклон поля экстремалей E функционала J, такой, что $\Omega = d\theta$, $\theta : D \to \mathbf{R}^m$. Тогда

$$\Phi(z) = K(z, \nabla\theta(z)).$$

Нетрудно найти наклон поля экстремалей $\tilde{E}$ функционала I, отвечающего функции (19):

$$\tilde{\Phi}(t, z) = \nabla_p H(z, \nabla_z S(t, z)) = K(z, \nabla_z S(t, z)) = \frac{\theta(z)}{t} K(z, \nabla\theta(z)) = \frac{\theta(z)}{t} \Phi(z).$$

Экстремали функционала I, образующие поле $\tilde{E}$, удовлетворяют уравнению

$$f'(t) = \tilde{\Phi}(t, \quad (t)) = \frac{\theta(f(t))}{t} \Phi(f(t)). \tag{20}$$

Опишем поле $\tilde{E}$ непосредственно в терминах E. Пусть $\gamma \in E$ и ζ — параметризация γ, удовлетворяющая соотношению $\theta(\zeta(t)) = t$. Тогда вектор-функция $f(t) = \zeta(ct)$, c — произвольное число, удовлетворяет уравнению (20), т. е. принадлежит полю $\tilde{E}$. В самом деле,

$$f'(t) = c\zeta'(ct) = c\Phi(\zeta(ct)) = c\frac{\theta(\zeta(ct))}{ct} \Phi(\zeta(ct)) = \frac{\theta(f(t))}{t} \Phi(f(t)).$$

Рассматривая в качестве ζ параметризацию произвольной кривой γ, $\gamma \in E$, получим, придавая c произвольные значения, произвольную экстремаль из $\tilde{E}$.

111. Достаточные условия экстремума. Получим достаточные условия экстремума для функционала J, аналогичные геометрическому варианту достаточных условий сильного экстремума из п. 104. Пусть E — поле экстремалей функционала J, выстилающих ограниченную область D, и γ_0 — замкнутый отрезок некоторой экстремали из E. Пусть далее γ — кривая с теми же граничными точками, что и кривая γ_0, причем γ может быть получена из γ_0 при помощи непрерывной деформации, не выводящей из D.

Всякая кривая γ, имеющая те же граничные точки, что и γ_0, и достаточно близкая к γ_0 в метрике пространства $C(\Gamma)$, может быть получена из γ_0 при помощи непрерывной деформации, не выводящей из D. Вычислим разность

$$J(\gamma)-J(\gamma_0)=\int_\Delta F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau-\int_\Delta F(\zeta_0(\tau),\ \zeta_0'(\tau))\,d\tau.$$

Здесь $\zeta_0:\Delta_0\to\mathbf{R}^m$ и $\zeta:\Delta\to\mathbf{R}^m$ — параметризации γ_0 и γ. Преобразуем интегралы, воспользовавшись уравнением Эйлера для функции F:

$$J(\gamma)=\int_\Delta F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))\,d\tau=\int_\Delta\ (\nabla_w F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau)),\ \zeta'(\tau))\,d\tau,$$
$$J(\gamma_0)=\int_{\Delta_0} F(\zeta_0(\tau),\ \zeta_0'(\tau))\,d\tau=\int_{\Delta_0}(\nabla_w F(\zeta_0(\tau),\ \zeta_0(\tau)),\ \zeta_0'(\tau))\,d\tau.$$

Так как γ_0 — отрезок экстремали, принадлежащей полю E, то

$$J(\gamma_0)=\int_{\Delta_0}(\nabla_w F(\zeta_0(\tau),\ \zeta_0'(\tau)),\ \zeta_0'(\tau))\,d\tau=$$
$$=\int_{\Delta_0}(\nabla_w F(\zeta_0(\tau),\ \Phi(\zeta_0(\tau))),\ \zeta_0'(\tau))\,d\tau=\int_{\gamma_0}\Omega(z,\ dz)=$$
$$=\int_\gamma\Omega(z,\ dz)=\int_\Delta(\nabla_w F(\zeta(\tau),\ \Phi(\zeta(\tau)),\ \zeta'(\tau))\,d\tau.$$

Здесь Φ — наклон поля, а Ω — отвечающая ему форма. Полученное для $J(\gamma_0)$ выражение позволяет представить разность $J(\gamma)-J(\gamma_0)$ в следующем виде:

$$J(\gamma)-J(\gamma_0)=\int_\Delta(\nabla_w F\ (\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))-\nabla_w F(\zeta(\tau),\ \Phi(\zeta(\tau)))\quad \zeta'(\tau))\,d\tau. \tag{21}$$

Будем считать, что параметризация ζ удовлетворяет условию нормировки: $F(\zeta(\tau),\ \zeta'(\tau))=1,\ \tau\in\Delta$.

Преобразуем выражение под знаком интеграла:

$$(\nabla_w F(z,\ w)-\nabla_w F(z,\ u),\ w)=-\int_0^1\frac{d}{d\alpha}(\nabla_w F(z,\ \eta(\alpha)),\ w)\,d\alpha=$$
$$=-\int_0^1(\nabla_w F_w(z,\ \eta(\alpha))\,\eta'(\alpha),\ w)\,d\alpha, \tag{22}$$

где $\eta(\alpha)=F^{-1}(z,\ \xi(\alpha))\,\xi(\alpha)$, $\xi(\alpha)=w+\alpha(u-w)$. Определим числа $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$w=a(\alpha)\,\eta'(\alpha)+b(\alpha)\,\eta(\alpha). \tag{23}$$

Подставляя явные выражения для η' и η, получаем

$$w=aF^{-1}(z,\ \xi(\alpha))\,(u-w)-a\xi(\alpha)\,F^{-2}(\nabla_w F(z,\ \xi(\alpha)),\ u-w)+$$
$$+bF^{-1}(z,\ \xi(\alpha))\,\xi(\alpha).$$

Сравнивая коэффициенты при $u-w$ и w, имеем

$$0=aF^{-1}-a\alpha F^{-2}(\nabla_w F,\ u-w)+bF^{-1}\alpha,$$
$$1=-aF^{-2}(\nabla_w F,\ u-w)+bF^{-1}.$$

Отсюда

$$a(\alpha)=-\alpha F(z,\ \xi(\alpha)),$$
$$b(\alpha)=F(z,\ \xi(\alpha))-\alpha(\nabla_w F(z,\ \xi(\alpha)),\ u-w).$$

Из условия однородности $(\nabla_w F(z, w), w) = F(z, w)$ следует

$$(\nabla_w F_w(z, w)\tilde{w}, w) = 0, \quad z, w, \tilde{w} \in \mathbf{R}^m, \quad w \neq 0.$$

Поэтому можно подставить в (22) выражение для w согласно (23) и отбросить вклад от $\eta(\alpha)$:

$$(\nabla_w F(z, w) - \nabla_w F(z, u), w) =$$
$$= \int_0^1 F(z, \xi(\alpha))(\nabla_w F_w(z, \eta(\alpha))\eta'(\alpha), \eta'(\alpha))\alpha\, d\alpha.$$

Продолжим преобразования. Отметим два простых факта: 1) векторы $\nabla_w F(z, \eta(\alpha))$ и $\eta'(\alpha)$ ортогональны:

$$(\nabla_w F(z, \eta(\alpha)), \eta'(\alpha)) = 0,$$

2)
$$(\nabla_w L_w(z, w)h, g) =$$
$$= F(z, w)(\nabla_w F_w(z, w)h, g) + (\nabla_w F(z, w), h)(\nabla_w F(z, w), g).$$

1) вытекает из условия нормировки $F(z, \eta(\alpha)) = 1$:

$$(\nabla_w F(z, \eta(\alpha)), \eta'(\alpha)) = \frac{d}{d\alpha} F(z, \eta(\alpha)) = 0;$$

утверждение 2) очевидно. Из 1) следует

$$(\nabla_w F(z, w) - \nabla_w F(z, u), w) =$$
$$= \int_0^1 F(z, \xi(\alpha))[(\nabla_w F_w(z, \eta(\alpha))\eta'(\alpha), \eta'(\alpha)) +$$
$$+ F^{-1}(z, \eta(\alpha))(\nabla_w F(z, \eta(\alpha)), \eta'(\alpha))(\nabla_w F(z, \eta(\alpha)), \eta'(\alpha))]\alpha\, d\alpha =$$
$$= \int_0^1 F(z, \xi(\alpha))(\nabla_w L_w(z, \eta(\alpha))\eta'(\alpha), \eta'(\alpha))\alpha\, d\alpha.$$

В этих преобразованиях следует предполагать, что $\xi(\alpha) \neq 0$, $\alpha \in [0, 1]$. Векторы u и w отличны от нуля; если, кроме того, $\|u - w\| \leqslant {}^1/_2\|w\|$, то $\|w\| = \|\xi(\alpha) - \alpha(u - w)\| \leqslant \|\xi(\alpha)\| + \alpha\|u - w\| \leqslant \|\xi(\alpha)\| + \|u - w\| \leqslant \|\xi(\alpha)\| + {}^1/_2\|w\|$, тем самым $\|\xi(\alpha)\| \geqslant {}^1/_2\|w\| > 0$.

Подставим полученное выражение в интеграл (21):

$$J(\gamma) - J(\gamma_0) = \int_\Delta d\tau \int_0^1 \alpha\, d\alpha\, F(\zeta(\tau), \xi(\tau, \alpha)) \times$$
$$\times (\nabla_w L_w(\zeta(\tau), (\eta(\tau, \alpha))\eta_\alpha(\tau, \alpha), \eta_\alpha(\tau, \alpha)),$$

здесь положено

$$\xi(\tau, \alpha) = \Phi(\zeta(\tau)) + \alpha[\zeta'(\tau) - \Phi(\zeta(\tau))],$$
$$\eta(\tau, \alpha) = F^{-1}(\zeta(\tau), \xi(\tau, \alpha))\xi(\tau, \alpha).$$

Если кривая γ достаточно близка к кривой γ_0 в пространстве $C^1(\Gamma)$, то $\|\zeta'(\tau) - \Phi(\zeta(\tau))\| \leqslant {}^1/_2\|\Phi(\zeta(\tau^1)\|$ всюду на Δ. Тогда $\|\xi(\tau, \alpha)\| \geqslant {}^1/_2\|\Phi(\zeta(\tau))\|$, $\tau \in \Delta$.

Допустим, что в дополнение к обычным предположениям

$$(\nabla_w L_w(z, w)h, h) \geqslant \mu\|h\|^2, \quad \mu > 0, \tag{24}$$

где $z, w, h \in \mathbf{R}^m$, $\|z\| \leqslant r$, $F(z, w) = 1$. Оценка (24) предполагается справедливой при всяком $r > 0$, число μ может зависеть от r. Тогда

$$J(\gamma) - J(\gamma_0) \geqslant$$
$$\geqslant \mu \int_\Delta d\tau \int_0^1 \alpha \, d\alpha \, F(\zeta(\tau), \xi(\tau, \alpha)) \|\eta_\alpha(\tau, \alpha)\|^2.$$

Число r считается выбранным так, что $\|z\| \leqslant r$ при $z \in D$. Нетрудно убедиться, что $\eta_\alpha(\tau, \alpha) = 0$ при всех $\tau \in \Delta$, $\alpha \in [0, 1]$ лишь в том случае, когда $\gamma = \gamma_0$. Следовательно, если кривая γ достаточно близка к γ_0 в метрике $C^1(\Gamma_m)$, то $J(\gamma) - J(\gamma_0) > 0$ при $\gamma \neq \gamma_0$.

Резюмируем: *пусть функционал J удовлетворяет условию* (24), *тогда всякая экстремаль, которую можно погрузить в поле экстремалей, сообщает функционалу J строгий минимум на множестве кривых с фиксированными граничными точками.*

Так как достаточно короткая экстремаль всегда может быть погружена в поле, то для функционала J, удовлетворяющего условию (24) достаточно короткая экстремаль — точка строгого минимума на множестве кривых с фиксированными граничными точками.

Пример. Пусть $F(z, w) = (A(z)w, w)^{1/2}$. Тогда $L(z, w) = 1/2\,(A(z)w, w)$ и $(\nabla_w L_w(z, w)h, h) = (A(z)h, h)$. Если оператор $A(z)$ положителен, то $(\nabla_w L_w(z, w)h, h) \geqslant \mu(z)\|h\|^2$, где $\mu(z)$ — наименьшее собственное значение оператора $A(z)$, $\mu(z) > 0$. Функция $\mu(z)$ непрерывна, поэтому $\mu(z) \geqslant \mu > 0$ при $\|z\| \leqslant r$. Отсюда вытекает утверждение, которое было сформулировано ранее (п. 77); *достаточно короткая геодезическая — кратчайшая кривая, соединяющая заданные точки.*

Г. ЛУЧЕВОЕ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Вариационные принципы механики и оптики и теория полей экстремалей сыграли в прошлом и продолжают в настоящее время играть важную роль в теоретической и математической физике. В предыдущих разделах было показано, что понятие поля экстремалей полезно с точки зрения внутренних задач вариационного исчисления. Однако исторически *поля экстремалей возникли в оптике и оказались естественным и удобным аппаратом для изучения связи между волновым и лучевым подходами.* Позднее с помощью идей теории полей экстремалей было открыто *уравнение Шредингера* — одно из основных соотношений *квантовой механики*, и было установлено также, что *поля экстремалей — естественный аппарат для изучения связи между механиками квантовой и классической.*

112. Лучевое приближение. *Распространение волн* различной природы, в том числе *оптических* и *акустических*, может быть при определенных условиях описано *волновым уравнением*

$$u_{tt} = c^2 \Delta_{\mathbf{x}} u + f.$$

Здесь $u(t, \mathbf{x})$ — функция на $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$, характеризующая волновой процесс, волновое поле, $\Delta_{\mathbf{x}}$ — оператор Лапласа на $\mathbf{R}^3$, а $c(\mathbf{x})$ и $f(t, \mathbf{x})$ — некоторые заданные функции: c, $c > 0$, является характеристикой среды и называется *скоростью распространения волн*, f характеризует внешнее воздействие. Приведенные ниже без доказательства некоторые свойства поля u могут быть доказаны при известных предположениях относительно c.

Будем предполагать, что $f(t, \mathbf{x})$ зависит от t *гармонически*:

$$f(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} \varphi(\mathbf{x}),$$

число ω называется *частотой*. Если такое воздействие было включено в далеком прошлом, то каким бы ни было первоначальное состояние поля, оно также будет зависеть от времени гармонически:

$$u(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} v(\mathbf{x}, \omega).$$

Функция v удовлетворяет *стационарному волновому уравнению*

$$c^2 \Delta v + \omega^2 v = -\varphi.$$

Нас будет интересовать решение, отвечающее *точечному источнику единичной полной интенсивности*, расположенному в нуле. В этом случае функция v всюду, кроме нуля, удовлетворяет однородному уравнению

$$c^2 \Delta v + \omega^2 v = 0. \tag{25}$$

Наличие в точке 0 источника единичной интенсивности означает, что функция v имеет в этой точке некоторую стандартную особенность, а именно

$$v(\mathbf{x}, \omega) \sim \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}\| c^2(0)}. \tag{26}$$

Если функция c постоянна: $c = c_0$, то

$$v(\mathbf{x}, \omega) = \frac{e^{i\omega c_0^{-1} \|\mathbf{x}\|}}{4\pi c_0^2 \|x\|}.$$

При больших частотах ω для функции c общего вида решение v обнаруживает сходное поведение

$$v(\mathbf{x}, \omega) = v_0(\mathbf{x}, \omega) + v_1(\mathbf{x}, \omega), \quad v_0(\mathbf{x}, \omega) = e^{i\omega\theta(\mathbf{x})} w_0(\mathbf{x}),$$

где $v_1(\mathbf{x}, \omega) \to 0$, когда $\omega \to \infty$. Длины волн видимого света малы сравнительно с размерами обыденных предметов; это и соответствует тому, что частота ω для видимого света может считаться большой. Подставим функцию $v_0(\mathbf{x}, \omega)$ в дифференциальное уравнение:

$$c^2 \Delta v_0 + \omega^2 v_0 = e^{i\omega\theta} [c^2 (\nabla + i\omega\nabla\theta)^2 + \omega^2] w_0 =$$
$$= e^{i\omega\theta} \{\omega^2 [1 - c^2 (\nabla\theta)^2] + i\omega c^2 [2(\nabla\theta, \nabla) + \Delta\theta] + c^2\Delta\} w_0 = 0.$$

Отсюда ввиду произвольности ω следуют три уравнения:

$$c^2 (\nabla\theta)^2 = 1, \tag{27}$$

$$2(\nabla\theta, \Delta w_0) + (\Delta\theta) w_0 = 0 \tag{28}$$

и

$$\Delta w_0 = 0. \tag{29}$$

Первое из них — это уравнение, которому должна удовлетворять функция θ. Оно уже встречалось в п. 109, было названо *уравнением эйконала* и является уравнением Гамильтона — Якоби для *функционала Ферма*

$$\gamma \to \int_\gamma \frac{ds}{c(\mathbf{x})}.$$

Второе уравнение характеризует функцию w_0. Вместе с условием (26) оно определяет функцию w_0 однозначно. Уравнение (29) оказывается при этом условием на функцию c. Не желая ограничивать вид функции c, мы не можем удовлетворить уравнению (29). Это значит, что функция v_0 не может удовлетворять стационарному волновому уравнению (25) точно. Ограничиваясь уравнениями (27) и (28), мы требуем, чтобы функция v_0 удовлетворяла уравнению в главных порядках при больших ω.

Едва ли нужно разъяснять, что функция θ должна быть первообразной формы, отвечающей центральному полю экстремалей для функционала Ферма

с центром в точке 0, первообразной, фиксированной условием $\theta(0)=0$. Такое поле всегда существует в некоторой окрестности нуля. Для функционала

$$\gamma \to \int_\gamma \frac{ds}{c_0}$$

$\theta(\mathbf{x})=c_0^{-1}\|\mathbf{x}\|$. В общем случае

$$\theta(\mathbf{x})=c^{-1}(0)\|\mathbf{x}\|+\theta_1(\mathbf{x}),$$

где θ_1 таково, что $\|\mathbf{x}\|^{-2}\theta_1(\mathbf{x})$ ограничено при $\mathbf{x}=0$. В оптике экстремали поля принято называть *лучами*, а трансверсальные, т. е. ортогональные к ним поверхности Γ_σ, на которых постоянна функция θ: $\theta(\mathbf{x})=\sigma$, — *волновыми фронтами*.

113. Уравнение переноса. Обратимся к уравнению (28) для функции w_0. Это уравнение принято называть *уравнением переноса*. Пусть $\xi\in\mathbf{R}^3$. Рассмотрим экстремаль, проходящую через точку 0 и имеющую в этой точке касательную, направленную по вектору ξ. Обозначим через $A(\xi)$ точку пересечения указанной экстремали и поверхности $\Gamma_{\|\xi\|}$. Таким образом, возникает отображение $A:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ (определенное, строго говоря, не всюду на $\mathbf{R}^3$). Точка $A(\sigma\hat{\xi})\in\mathbf{R}^3$, $\|\hat{\xi}\|=1$, как функция от σ описывает экстремаль. Множество таких экстремалей составляет рассматриваемое поле (рис. 30). В п. 107 было установлено, что

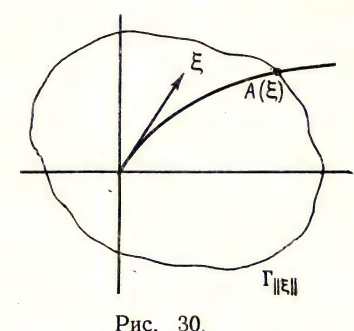


Рис. 30.

$$\frac{\partial A(\sigma\hat{\xi})}{\partial\sigma}=c^2(A(\sigma\hat{\xi}))\nabla\theta(A(\sigma\hat{\xi})),\qquad \left\|\frac{\partial A(\sigma\hat{\xi})}{\partial\sigma}\right\|=c(A(\sigma\hat{\xi})).$$

Если $c=c_0$, то $A(\xi)=c_0\xi$.

Из уравнения для $A(\sigma\hat{\xi})$ следует

$$\frac{\partial}{\partial\tau}A(\xi+\tau\hat{\xi})=c^2(A(\xi+\tau\hat{\xi}))\nabla\theta(A(\xi+\tau\hat{\xi})),\tag{30}$$

где $\hat{\xi}=\|\xi\|^{-1}\xi$, $\xi\in\mathbf{R}^3$. Продифференцируем это уравнение по ξ:

$$B'(\tau)=[c^2(A(\xi+\tau\hat{\xi}))\nabla\theta'(A(\xi+\tau\hat{\xi}))+\nabla\theta(A(\xi+\tau\hat{\xi}))(c^2)'(A(\xi+\tau\hat{\xi}))]B(\tau),$$

где

$$B(\tau)=\frac{d}{d\xi}A(\xi+\tau\hat{\xi})=A'(\xi+\tau\hat{\xi})\left[I+\tau\frac{I-\hat{\xi}(\cdot,\hat{\xi})}{\|\xi\|}\right].$$

Возникший здесь оператор $\hat{\xi}(\cdot,\hat{\xi}):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ действует по формуле $\mathbf{h}\to\hat{\xi}(\mathbf{h},\hat{\xi})$.

Если $C'(\tau)=P(\tau)C(\tau)$ — линейное дифференциальное уравнение для оператор-функции $C:\mathbf{R}\to\mathbf{L}(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n)$, в котором P — заданная оператор-функция, то, согласно *формуле Лиувилля* (см. [6]), $\frac{d}{d\tau}\ln\det C(\tau)=\operatorname{tr}P(\tau)$. В этой формуле $\operatorname{tr}P(\tau)$ — *след оператора* $P(\tau)$, т. е. сумма диагональных элементов его матрицы, $\det C(\tau)$ — *определитель матрицы оператора* $C(\tau)$.

Применим формулу Лиувилля к уравнению для B

$$\frac{d}{d\tau}\ln\det B(\tau)=\operatorname{tr}[c^2(A(\xi+\tau\hat{\xi}))\nabla\theta'(A(\xi+\tau\hat{\xi}'))+$$
$$+\nabla\theta(A(\xi+\tau\hat{\xi}))(c^2)'(A(\xi+\tau\hat{\xi}))].$$

Матрица оператора, возникшего под знаком следа, имеет вид

$$c^2(A(\xi+\tau\hat{\xi}))\,\theta_{x_ix_j}(A(\xi+\tau\hat{\xi}))+\theta_{x_i}(A(\xi+\tau\hat{\xi}))\,(c^2)_{x_j}(A(\xi+\tau\hat{\xi})),$$

поэтому

$$\frac{d}{d\tau}\,\text{ln}\det B(\tau)=c^2\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right)\Delta\theta\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right)+\left(\nabla\theta\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right),\ \nabla c^2\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right)\right).$$

Так как определитель произведения равен произведению определителей, то

$$\det B(\tau)=\det A'\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\det\left[I+\tau\frac{I-\hat{\xi}(\cdot,\ \hat{\xi})}{\|\xi\|}\right].$$

Оператор $\left[I+\tau\frac{I-\hat{\xi}(\cdot,\ \hat{\xi})}{\|\xi\|}\right]$ имеет собственный вектор ξ с собственным значением 1 и двумерное собственное подпространство, отвечающее собственному значению $1+\frac{\tau}{\|\xi\|}$ и состоящее из векторов, ортогональных к ξ. Определитель, как известно, равен произведению собственных значений, поэтому

$$\det\left[I+\tau\frac{I-\hat{\xi}(\cdot,\ \hat{\xi})}{\|\xi\|}\right]=\left(1+\frac{\tau}{\|\xi\|}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\,\text{ln}\det A'\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)+\frac{2}{\|\xi\|}\left(1+\frac{\tau}{\|\xi\|}\right)^{-1}=$$
$$=c^2\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right)\Delta\theta\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right)+\left(\nabla\theta\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right),\ \nabla c^2\left(A\left(\xi+\tau\hat{\xi}\right)\right)\right).$$

Положим здесь $\tau=0$:

$$\left(\hat{\xi},\ \nabla_{\xi}\,\text{ln}\det A'(\xi)\right)+\frac{2}{\|\xi\|}=c^2(A(\xi))\,\Delta\theta(A(\xi))+(\nabla\theta(A(\xi)),\ \nabla c^2(A(\xi))).$$

Выполним теперь замену переменной $\mathbf{x}=A(\xi)$. Ради краткости положим $l(\xi)=\text{ln}\det A'(\xi)$ и преобразуем $\left(\hat{\xi},\ \nabla l(\xi)\right)$:

$$\left(\hat{\xi},\ \nabla l(\xi)\right)=l'(\xi)\,\hat{\xi}=l'(\xi)\,A'^{-1}(\xi)\,A'(\xi)\,\hat{\xi}=$$
$$=(l\circ A^{-1})'(\mathbf{x})\,c^2(\mathbf{x})\,\nabla\theta(\mathbf{x})=c^2(\mathbf{x})\,(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla(l\circ A^{-1})(\mathbf{x})).$$

Здесь использовано уравнение (30), в котором положено $\tau=0$:

$$A'(\xi)\,\hat{\xi}=c^2(\mathbf{x})\,\nabla\theta(\mathbf{x}).$$

Итак,

$$c^2(\mathbf{x})\,(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla(l\circ A^{-1})(\mathbf{x}))+\frac{2}{\theta(\mathbf{x})}=c^2(\mathbf{x})\,\Delta\theta(\mathbf{x})+(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla c^2(\mathbf{x})).$$

Вспомним, что $(\nabla\theta)^2=c^{-2}$, поэтому

$$\frac{2}{\theta(\mathbf{x})}=2c^2(\mathbf{x})\,(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla\ln\theta(\mathbf{x}))=c^2(\mathbf{x})\,(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla\ln\theta^2(\mathbf{x})).$$

Следовательно,

$$(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla(l\circ A^{-1})(\mathbf{x}))+(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla\ln\theta^2(\mathbf{x}))=\Delta\theta(\mathbf{x})+(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla\ln c^2(\mathbf{x})).$$

Положим

$$b(\mathbf{x})=\frac{c(\mathbf{x})}{\theta(\mathbf{x})}\left[\det A'(A^{-1}(\mathbf{x}))\right]^{-1/2}=\frac{c(\mathbf{x})}{\theta(\mathbf{x})}\,e^{-\frac{1}{2}\,l(A^{-1}(\mathbf{x}))},$$

тогда

$$\nabla(l\circ A^{-1})(\mathbf{x})=2\nabla\left[\ln c(\mathbf{x})-\ln\theta(\mathbf{x})-\ln b(\mathbf{x})\right].$$

Подстановка в уравнение дает

$$2\,(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla\ln b(\mathbf{x}))+\Delta\theta(\mathbf{x})=0$$

или

$$2\,(\nabla\theta(\mathbf{x}),\ \nabla b(\mathbf{x}))+\Delta\theta(\mathbf{x})\cdot b(\mathbf{x})=0.$$

В главном порядке при $\mathbf{x}\to 0$ функция b ведет себя так же, как и в случае постоянной скорости $c(\mathbf{x})=c(0)$. При постоянной скорости $c(\mathbf{x})=c_0$

$$b(\mathbf{x})=\frac{c_0}{c_0^{-1}\,\|\mathbf{x}\|}\,[\det Ic_0]^{-1/2}=\frac{c_0^{1/2}}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Это значит, что функция

$$w_0(\mathbf{x})=\frac{b(\mathbf{x})}{4\pi\,(c(0))^{5/2}}=\frac{c(\mathbf{x})}{4\pi\,(c(0))^{5/2}\theta(\mathbf{x})}\,[\det A'(A^{-1}(\mathbf{x}))]^{-1/2}$$

удовлетворяет и уравнению переноса и начальному условию при $\mathbf{x}\to 0$. Можно показать, что уравнение переноса и начальное условие определяют функцию w_0 однозначно.

Упражнение. Пусть D — область в $\mathbf{R}^3$; введем область D_τ, в которую переходят точки области D, двигаясь вдоль лучей со скоростью c в течение времени τ. Область D_τ можно получить из D с помощью преобразования $A\circ T_\tau\circ A^{-1}$, где $T_\tau(\xi)=(\|\xi\|+\tau)\,\hat{\xi}$. Показать, что энергия поля u в областях D и D_τ одинакова (*закон сохранения энергии в лучевом приближении*).

114. Квазиклассическое приближение. Рассмотрим *гамильтонову механическую систему* $(\mathbf{R}^n, H)$ с функцией Гамильтона

$$H(t,\ \mathbf{x},\ \mathbf{p})=\frac{1}{2m}\,\mathbf{p}^2+U(t,\ \mathbf{x}).$$

Уравнения Гамильтона имеют вид

$$\mathbf{f}'=\frac{1}{m}\,\mathbf{g},\quad \mathbf{g}'=-\nabla_{\mathbf{x}}U(t,\ \mathbf{f}).$$

Состояние этой системы в квантовой механике описывается комплекснозначной функцией ψ на $\mathbf{R}^n$, называемой волновой функцией. Зависимость волновой функции от времени дается *уравнением Шредингера,* которое должно рассматриваться как уравнение движения в квантовой механике

$$ih\psi_t(t,\ \mathbf{x})=-\frac{h^2}{2m}\,\Delta_{\mathbf{x}}\psi(t,\ \mathbf{x})+U(t,\ \mathbf{x})\,\psi(t,\ \mathbf{x}).$$

Здесь $\psi(t,\ \cdot)$ — волновая функция в момент времени t, $\Delta_{\mathbf{x}}$ — оператор Лапласа на $\mathbf{R}^n$, а h — некоторое положительное число, которое называется *постоянной Планка*. Задаче Коши для уравнений Гамильтона соответствует задача Коши для уравнения Шредингера, т. е. задача отыскания решения, удовлетворяющего начальному условию

$$\psi(0,\ \mathbf{x})=\tilde{\psi}(\mathbf{x}).$$

Квантовая система богаче первоначальной классической. Физическая система, которая подчиняется законам квантовой механики, в некоторых обстоятельствах может вести себя как классическая. Переход уравнения Шредингера в уравнения Гамильтона с точки зрения математического аппарата происходит при $h\to 0$ на волновых функциях, зависимость которых от h имеет вид

$$\psi(t,\ \mathbf{x})=\psi_0(t,\ \mathbf{x},\ h)+\psi_1(t,\ \mathbf{x},\ h),$$

где

$$\psi_0(t,\ \mathbf{x},\ h)=e^{\frac{i}{h}S(t,\ \mathbf{x})}\,\varphi_0(t,\ \mathbf{x}),$$

а $\psi_1(t,\ \mathbf{x},\ h)\to 0$, когда $h\to 0$. Если

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x})=e^{\frac{i}{h}\tilde{S}(\mathbf{x})}\,\tilde{\varphi}(\mathbf{x}),$$

то функция ψ на некотором интервале изменения t обладает указанным поведением. Мы не станем приводить физической интерпретации изложенных и предстоящих построений, а ограничимся лишь получением формул для S и φ_0, из которых будет видно, что S и φ_0 описываются в терминах классической механической системы.

Действуя в том же плане, как и в п. 112, подставим функцию ψ_0 в дифференциальное уравнение

$$\left[ih\frac{\partial}{\partial t}+\frac{h^2}{2m}\Delta-U\right]\psi_0=e^{\frac{i}{h}S}\left[\left(-S_t+ih\frac{\partial}{\partial t}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2m}\left(\nabla_{\mathbf{x}}S+\frac{h}{i}\nabla_{\mathbf{x}}\right)^2-U\right]\varphi_0=e^{\frac{i}{h}S}\left\{\left[S_t+\frac{1}{2m}(\nabla_{\mathbf{x}}S)^2+U\right]+\right.$$

$$\left.+ih\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{m}(\nabla_{\mathbf{x}}S,\ \nabla_{\mathbf{x}})+\frac{1}{2m}(\Delta_{\mathbf{x}}S)\right]+\frac{h^2}{2m}\Delta_{\mathbf{x}}\right\}\varphi_0=0.$$

Считая h произвольным, получаем три уравнения:

$$S_t+\frac{1}{2m}(\nabla_{\mathbf{x}}S)^2+U=0\quad\text{или}\quad S_t+H(t,\ \mathbf{x},\ \nabla_{\mathbf{x}}S)=0, \tag{31}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{m}(\nabla_{\mathbf{x}}S,\ \nabla_{\mathbf{x}})+\frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{x}}S\right]\varphi_0=0, \tag{32}$$

$$\Delta_{\mathbf{x}}\varphi_0=0.$$

Первое уравнение — уравнение для S, второе — уравнение для φ_0, а третье должно быть опущено так же, как аналогичное уравнение в оптической задаче.

Уравнение (31) есть не что иное, как уравнение Гамильтона — Якоби для исходной классической системы. Добавив начальное условие $S(0,\ \mathbf{x})=\tilde{S}(\mathbf{x})$, получим задачу Коши для этого уравнения. Ее решение — первообразная формы Ω для поля экстремалей $\xi\to(\mathbf{f}(t,\ \xi),\ \mathbf{g}(t,\ \xi)),\ (t,\ \xi)\in\Delta\times\mathbf{R}^n$ с начальными условиями

$$\mathbf{f}(0,\ \xi)=\xi,\quad g(0,\ \xi)=\nabla\tilde{S}(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^n.$$

Функция φ_0 должна определяться из *уравнения переноса* (32) и начального условия $\varphi_0(0,\ \mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x})$. Введем отображение $A_t=\mathbf{f}(t,\ \cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, которое следит за изменением конфигурации вдоль экстремали. В терминах A_t легко выписать функцию φ_0:

$$\varphi_0(t,\ \mathbf{x})=\left[\det(A_t)'\left(A_t^{-1}(\mathbf{x})\right)\right]^{-1/2}\tilde{\varphi}\left(A_t^{-1}(\mathbf{x})\right).$$

Здесь $(A_t)'$ — производная отображения A_t. Так как A_0 — тождественное отображение, то $(A_0)'(\xi),\ \xi\in\mathbf{R}^n$, — тождественный оператор. Поэтому ясно, что $\varphi_0(0,\ \mathbf{x})=\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$.

Проверим дифференциальное уравнение. Заметим, что A_t удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}A_t(\xi)=\nabla_{\mathbf{p}}H\left(t,\ A_t(\xi),\ \nabla_{\mathbf{x}}S\left(t,\ A_t(\xi)\right)\right).$$

В нашем случае

$$\frac{\partial}{\partial t}A_t(\xi)=\frac{1}{m}\nabla_{\mathbf{x}}S\left(t,\ A_t(\xi)\right). \tag{33}$$

Если $u:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ — произвольная функция, то

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(A_t^{-1}(\mathbf{x})\right)=u'\left(A_t^{-1}(\mathbf{x})\right)\frac{\partial}{\partial t}A_t^{-1}(\mathbf{x})=$$

$$=u'\left(A_t^{-1}(\mathbf{x})\right)\left(A_t^{-1}\right)'(\mathbf{x})\left[\left(A_t^{-1}\right)'(\mathbf{x})\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial t}A_t^{-1}(\mathbf{x})=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(u\circ A_t^{-1}\right)(\mathbf{x})\left(A_t(\xi)\right)'\frac{\partial}{\partial t}A_t^{-1}(\mathbf{x}).$$

В этой формуле $\xi = A_t^{-1}(\mathbf{x})$. Воспользуемся соотношением

$$A_t(A_t^{-1}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

и продифференцируем его по t:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} A_t\right)(A_t^{-1}(\mathbf{x})) + (A_t)'(A_t^{-1}(\mathbf{x}))\frac{\partial}{\partial t} A_t^{-1}(\mathbf{x}) = 0,$$

отсюда

$$(A_t(\xi))' \frac{\partial}{\partial t} A_t^{-1}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x}).$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(A_t^{-1}(\mathbf{x})) = -\frac{1}{m}\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(u \circ A_t^{-1})(\mathbf{x})\right] \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} u(A_t^{-1}(\mathbf{x})) = -\frac{1}{m}(\nabla(u \circ A_t^{-1})(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})).$$

Будем искать функцию φ_0 в виде

$$\varphi_0(t, \mathbf{x}) = \rho(t, \mathbf{x})\tilde{\varphi}(A_t^{-1}(\mathbf{x})).$$

Согласно предыдущей формуле

$$\frac{\partial \varphi_0(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial t} \tilde{\varphi}(A_t^{-1}(\mathbf{x})) - \rho(t, x)\frac{1}{m}(\nabla(\tilde{\varphi} \circ A_t^{-1})(\mathbf{x}), \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})).$$

Подстановка в уравнение для φ_0 дает для ρ прежнее уравнение переноса

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}(\Delta_{\mathbf{x}} S, \nabla_{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2m}\Delta_{\mathbf{x}} S\right]\rho = 0,$$

причем функция ρ должна удовлетворять начальному условию $\rho(0, \mathbf{x}) = 1$.

Чтобы получить выражение для ρ, продифференцируем уравнение (33) по ξ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A_t)'(\xi) = \frac{1}{m} \nabla_{\mathbf{x}} S_{\mathbf{x}}(t, A_t(\xi))(A_t)'(\xi).$$

В силу *формулы Лиувилля*

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\det(A_t)'(\xi) = \frac{1}{m}\Delta_{\mathbf{x}} S(t, A_t(\xi)).$$

Подставим сюда $\xi = A_t^{-1}(\mathbf{x})$. Вычислим производную

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\det(A_t)'(A_t^{-1}(\mathbf{x})) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln\det(A_t)'(A_s^{-1}(\mathbf{x})) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial s} \ln\det(A_t)'(A_s^{-1}(\mathbf{x}))\right]_{t=s} = \frac{1}{m}\Delta S(t, \mathbf{x}) -$$

$$-\frac{1}{m}(\nabla_{\mathbf{x}} \ln\det(A_t)'(A_t^{-1}(\mathbf{x})), \nabla_{\mathbf{x}} S(t, \mathbf{x})).$$

Положим $\rho(t, \mathbf{x}) = [\det(A_t)'(A_t^{-1}(\mathbf{x}))]^{-1/2}$. Из предыдущего соотношения следует уравнение переноса для функции ρ.

Упражнение. Показать, что

$$\int_{D_t} |\varphi_0(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \int_{D_0} |\tilde{\varphi}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

где $D_0 \subset \mathbf{R}^n$, а $D_t = A_t D_0$, иначе говоря, точки D_t получены из точек D_0 с помощью отображения A_t.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Напомним основные теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть F — отображение $D \to \mathbf{R}^n$, D — область в $\mathbf{R}^{n+1}$, принадлежащее классу C^r, $r \geqslant 1$. Рассмотрим уравнение вида

$$\mathbf{f}'(t) = F(t, \mathbf{f}(t)), \ \mathbf{f}: \Delta = (a, b) \to \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

В координатной записи оно выглядит следующим образом:

$$f_1'(t) = F_1(t, f_1(t), \ldots, f_n(t)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n'(t) = F_n(t, f_1(t), \ldots, f_n(t)).$$

Задача построения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{x}_0$, где $(t_0, \mathbf{x}_0)$ — фиксированная точка области D, называется *задачей Коши.*

Теорема 1 (существования и единственности). *Решение задачи Коши существует на достаточно малом интервале* $|t - t_0| < \alpha$. *Два решения с одинаковым начальным условием совпадают на пересечении интервалов, где они определены.*

Пусть $\mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}^n$ — решение уравнения (1). Интервал Δ называется *максимальным интервалом* определения решения, если вектор-функция $\mathbf{f}$ не может быть распространена как решение уравнения ни на какой интервал Δ_1, более широкий, чем Δ. В этом определении интервал Δ может быть конечным: $\Delta = (a, b)$, полубесконечным: $\Delta = (-\infty, b)$, $\Delta = (a, \infty)$, или бесконечным в обе стороны: $\Delta = (-\infty, \infty)$.

Теорема 2 (о продолжении решения). *Пусть* $\mathbf{f}: \Delta_0 \to \mathbf{R}^n$ — *решение уравнения* (1). *Тогда вектор-функция* $\mathbf{f}$ *может быть продолжена как решение на максимальный интервал определения* Δ. *Точка* $(t, \mathbf{f}(t))$ *графика решения стремится к границе области* D, *когда* t *стремится к границе интервала* Δ.

Рассмотрим множество E всех решений уравнения (1), считая, что каждое распространено на максимальный интервал определения. Из предыдущих теорем вытекает

Теорема 3 (о выстилании области). *Через каждую точку области* D *проходит график решения из множества* E *и притом единственного.*

Пусть D — область в $\mathbf{R}^{1+n+m}$ и $F: D \to \mathbf{R}^n$ — отображение класса C^r, $r \geqslant 1$. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{f}'(t) = F(t, \mathbf{f}(t), \xi), \ \mathbf{f}: \Delta \to \mathbf{R}^n, \ \xi \in \mathbf{R}^m, \ (t, \mathbf{f}(t), \xi) \in D, \tag{2}$$

содержащее параметр ξ, и решение задачи Коши с начальным условием $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{x}_0$, где $(t_0, \mathbf{x}_0, \xi) \in D$. Распространим это решение на максимальный интервал определения $\Delta(t_0, \mathbf{x}_0, \xi)$. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{2+n+m}$ множество D_1, состоящее из точек вида $(t, t_0, \mathbf{x}_0, \xi)$, где $t \in \Delta(t_0, \mathbf{x}_0, \xi)$, $(t_0, \mathbf{x}_0, \xi) \in D$. На этом множестве определено отображение $\mathbf{f}$ — решение уравнения (2) с начальным условием $\mathbf{f}(t_0) = x_0$.

Теорема 4 (о зависимости от параметра). *Множество* D_1 — *область, отображение* $\mathbf{f}: D_1 \to \mathbf{R}^n$ *принадлежит классу* C^r.

Пусть $\mathbf{g}: \Delta = [a, b] \to \mathbf{R}^n$ — определенное на замкнутом интервале решение уравнения (1). График вектор-функции вместе с граничными точками принадлежит области D. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с начальным условием $\mathbf{f}(a) = \mathbf{x}_0$.

Теорема 5. *Если норма* $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{g}(a)\|_{\mathbf{R}^n}$ *достаточно мала, то решение* $\mathbf{f}$ *определено на интервале* Δ *и удовлетворяет при всех* t, $t \in \Delta$, *соотношению* $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{g}(t)\| < \varepsilon$ *с заданным* $\varepsilon > 0$.

Теорема 5 — простое следствие теоремы 4. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение (2) при фиксированном значении параметра ξ. Множество точек области D_1 при фиксированных ξ и $t_0 = a$ — открытое множество. Часть

D' этого множества, образованная точками $(t, \mathbf{x}_0)$, удовлетворяющими условию $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{g}(a)\| < \delta$, изображена на рис. 31. Характерным свойством множества D' является то, что при фиксированном $\mathbf{x}_0$ оно представляет собою интервал. Рассмотрим точку $p = (\tau, \mathbf{g}(a))$, принадлежащую D', считая, что $\tau > b$. Пусть U — ε-окрестность точки p, $\varepsilon < \tau - b$, лежащая в D'. Если $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{g}(a)\| < \varepsilon$, то решение $\mathbf{f}$ определено на интервале $[a, \tau - \varepsilon]$, а тем самым и на интервале $\Delta = [a, b]$.

Дифференциальное уравнение (1) называется *линейным*, если отображение $(t, \mathbf{x}) \to F(t, \mathbf{x})$ линейно по второму аргументу, т. е. определено на области вида $\Delta \times \mathbf{R}^n$, и при каждом t, $t \in \Delta$, является линейным оператором $F(t)$ в $\mathbf{R}^n$. Уравнение (1) имеет в этом случае вид

$$\mathbf{f}'(t) = F(t)\,\mathbf{f}(t), \qquad (3)$$

или в координатной записи

$$f_i'(t) = \sum_{j=1}^n F_{ij}(t)\, f_j(t).$$

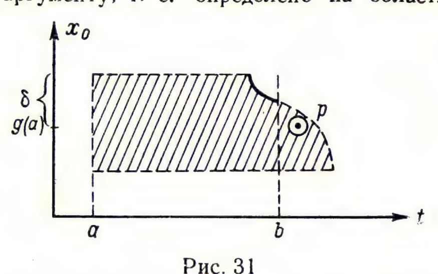


Рис. 31

Теорема 6 (о глобальной разрешимости). *Решение задачи Коши для уравнения* (3) *с начальным условием* $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $t_0 \in \Delta$, *определено на всем интервале* Δ. *Множество всех решений уравнения* (3) *на интервале* Δ *образует n-мерное векторное пространство.*

Обозначим через g матричное решение уравнения (3), удовлетворяющее условию $g(t_0) = I$, I — тождественный оператор. Отметим, что g называют *матричным решением*, если каждый столбец матрицы $\{g_{ij}\}$ оператора g является решением уравнения. Оператор $g(t)$ при каждом t обратим, отображения g и $t \to [g(t)]^{-1}$ непрерывно дифференцируемы.

Теорема 7 (метод вариации постоянных). *Решение задачи Коши для уравнения*

$$\mathbf{f}'(t) = F(t)\,\mathbf{f}(t) + \mathbf{b}(t),$$

$\mathbf{b}$ — *заданная вектор-функция* $\Delta \to \mathbf{R}^n$, *с начальным условием* $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *представимо формулой*

$$\mathbf{f}(t) = \int_{t_0}^t g(t)\,[g(\tau)]^{-1}\,\mathbf{b}(\tau)\,d\tau + g(t)\,\mathbf{x}_0.$$

Теоремы 1, 2, 6 и 7 можно найти почти в любом общем курсе теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [6]). Теорема 3 не нуждается в специальном доказательстве. Теорема 4 приводится обычно в менее определенных формулировках, из которых теорема 5 не вытекает столь непосредственно. Полное доказательство теоремы 4 читатель сможет найти в гл. 5 книги [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

МНОЖЕСТВО $S(\Delta)$

Здесь будет доказано, что *множество $S(\Delta)$, состоящее из финитных бесконечно дифференцируемых функций на интервале Δ, плотно в $H(\Delta)$ и плотно в $H_0^1(\Delta)$.*

Введем функцию $\theta: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, обладающую следующими свойствами: 1) θ — бесконечно дифференцируема, 2) $\theta(t)=0$ при $t \leqslant -1$, 3) $\theta(t) \leqslant 1$, 4) $\theta(t)=1$ при $t \geqslant 0$. Пусть $f \in H(\Delta)$ и $\varepsilon > 0$, положим

$$f_\varepsilon(t) = f(t)\,\theta\left(\frac{t-a}{\varepsilon}-2\right)\theta\left(\frac{b-t}{\varepsilon}-2\right).$$

Если $4\varepsilon < b-a$, то $f_\varepsilon(t)=f(t)$ при $a+2\varepsilon \leqslant t \leqslant b-2\varepsilon$, $f_\varepsilon(t)=0$ при $t \leqslant a+\varepsilon$ и $b-\varepsilon \leqslant t$. Функция f_ε принадлежит $H(\Delta)$, причем

$$\|f-f_\varepsilon\|^2 = \int_\Delta (f(t)-f_\varepsilon(t))^2\,dt =$$
$$= \int_\Delta f^2(t)\left[1-\theta\left(\frac{t-a}{\varepsilon}-2\right)\theta\left(\frac{b-t}{\varepsilon}-2\right)\right]^2 dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^{a+\varepsilon} f^2(t)\,dt + \int_{b-\varepsilon}^b f^2(t)\,dt \leqslant 2\varepsilon \max_\Delta f^2 = 2\varepsilon\,\|f\|_C^2.$$

Полученная оценка показывает, что множество функций вида f_ε плотно в пространстве H. Отсюда следует, что *в пространстве H плотно множество финитных функций из $C(\Delta)$.*

Пусть g — финитная функция из $C(\Delta)$ и $\delta > 0$. Положим $\theta_1(t) = \theta(1-2t)$ и

$$(g)_\delta(t) = A\delta^{-1}\int_\Delta \theta_1\left(\left(\frac{t-\tau}{\delta}\right)^2\right) g(\tau)\,d\tau,$$

где $A^{-1} = \int_{\mathbf{R}} \theta_1(t^2)\,dt$. Число A выбрано так, что выполняется равенство

$$1 = A\delta^{-1}\int_{\mathbf{R}} \theta_1\left(\left(\frac{t-\tau}{\delta}\right)^2\right) d\tau.$$

В интеграле, определяющем функцию $(g)_\delta$, интегрирование фактически распространяется на интервал $|\tau-t| \leqslant \delta$. Поэтому в силу финитности g при достаточно малых δ функция $(g)_\delta$ также финитна. При таких δ интегрирование в формуле, определяющей функцию $(g)_\delta$, можно распространить на всю ось. Ясно, кроме того, что функция $(g)_\delta$ бесконечно дифференцируема. Оценим разность

$$|(g)_\delta(t) - g(t)| = A\delta^{-1}\left|\int_{\mathbf{R}} \theta_1\left(\left(\frac{t-\tau}{\delta}\right)^2\right)[g(\tau)-g(t)]\,d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant A\delta^{-1}\int_{\mathbf{R}} \theta_1\left(\left(\frac{t-\tau}{\delta}\right)^2\right)|g(\tau)-g(t)|\,d\tau \leqslant A\delta^{-1}\sup_{|\tau-t|<\varepsilon}|g(\tau)-g(t)|\times$$
$$\times\int_{\mathbf{R}} \theta_1\left(\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)^2\right) d\tau = \sup_{\tau\in\Delta,\ |\tau-t|\leqslant\delta}|g(\tau)-g(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\tau,\, t\in\Delta,\ |\tau-t|\leqslant\delta}|g(\tau)-g(t)| \equiv \omega_g(\delta),$$

причем $\omega_g(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Итак, $\|(g)_\delta - g\|_C \leqslant \omega_g(\delta)$ и, следовательно,

$$\|(g)_\delta - g\|_H \leqslant |\Delta|^{1/2}\,\omega_g(\delta). \tag{1}$$

Пусть $f \in H(\Delta)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем финитную непрерывную функцию g так, что $\|f-g\|_H < \varepsilon/2$. Построим функцию $(g)_\delta$. Число δ можно выбрать настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\|(g)_\delta - g\|_H \leqslant \varepsilon/2$. Тогда

$$\|f-(g)_\delta\|_H \leqslant \|f-g\| + \|g-(g)_\delta\| < \varepsilon.$$

Функция $(g)_\delta$ бесконечно дифференцируема, ее можно считать финитной. Поэтому *множество* S *действительно плотно в пространстве* H.

При переходе к пространству H_0^1 сохраняются и план доказательства и все конструкции. Для того чтобы установить, что финитные функции плотны в H_0^1, необходимо оценить $\| f - f_\varepsilon \|_{H^1}$, считая $f \in H_0^1$. Квадрат нормы в H^1 по сравнению с квадратом нормы в H содержит дополнительное слагаемое $\| f' - f'_\varepsilon \|_H^2$:

$$\| f' - f'_\varepsilon \|_H^2 = \int_\Delta (f' - f'_\varepsilon)^2 \, dt =$$
$$= \int_\Delta \left\{ f'(t) \left[1 - \theta \left(\frac{t-a}{\varepsilon} - 2 \right) \theta \left(\frac{b-t}{\varepsilon} - 2 \right) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\varepsilon} f(t) \left[\theta' \left(\frac{t-a}{\varepsilon} - 2 \right) \theta \left(\frac{b-t}{\varepsilon} - 2 \right) - \theta \left(\frac{t-a}{\varepsilon} - 2 \right) \theta' \left(\frac{b-t}{2} - 2 \right) \right] \right\}^2 dt.$$

Интегрирование вновь ограничено множествами, лежащими в ε-окрестностях концов. В этих окрестностях используются следующие оценки для функции f:

$$| f'(t) | \leqslant \sup_\Delta | f'(t) |, \quad | f(t) | \leqslant \sup_{\tau \in \Delta} | f'(\tau) | \, (t-a), \quad | f(t) | \leqslant \sup_{\tau \in \Delta} | f'(\tau) | \, (b-t).$$

Подставляя эти оценки в интеграл и производя очевидные вычисления, получим $\| f' - f'_\varepsilon \|_H^2 \leqslant c\varepsilon \sup\limits_\Delta f'^2(t)$, где c определяется числом $\sup\limits_{\mathbf{R}} | \theta'(t) |$.

Таким образом, финитные функции плотны в H_0^1. Для перехода к бесконечно дифференцируемым функциям оценим, считая функцию g финитной, норму $\| (g)'_\delta - g' \|_H$. Подобная (1) оценка $\| (g)'_\delta - g' \|_H \leqslant | \Delta |^{1/2} \omega_{g'}(\delta)$ вытекает из равенства $(g)'_\delta = (g')_\delta$. В самом деле,

$$(g)'_\delta(t) = A\delta^{-1} \int_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial t} \theta_1 \left(\left(\frac{t-\tau}{\delta} \right)^2 \right) g(\tau) \, d\tau =$$
$$= A\delta^{-1} \int_{\mathbf{R}} \left[-\frac{\partial}{\partial \tau} \theta_1 \left(\left(\frac{t-\tau}{\delta} \right)^2 \right) \right] g(\tau) \, d\tau =$$
$$= A\delta^{-1} \int_{\mathbf{R}} \theta_1 \left(\left(\frac{t-\tau}{\delta} \right)^2 \right) g'(\tau) \, d\tau = (g')_\delta(t).$$

Предпоследний знак равенства основан на интегрировании по частям. Внеинтегральные члены отсутствуют в силу финитности функции g.

Задача. Пользуясь методами настоящего Приложения, показать, что лемма Дюбуа — Реймона допускает следующее обобщение: функционал $h \to \int_\Delta A(t) \times h^{(r)}(t) \, dt$ на $S(\Delta)$, где A и r фиксированы, $A \in C(\Delta)$, $r = 0, 1, \ldots$, равен нулю тогда и только тогда, когда A — полином степени не выше $r-1$. В частности, при $r = 0$ $A = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Цитированная литература

1. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1—2. М., 1972. 622 с.
2. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. М., 1973. 391 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М., 1976. 543 с.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л., 1962. 708 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1954. 491 с.
6. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1971. 239 с.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1970. 720 с.

Основная учебная литература

1. Ахиезер Н. И. Лекции по вариационному исчислению. М., 1955. 247 с.
2. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., 1961. 228 с.
3. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М.; Л., 1941. 308 с.
4. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. М.; Л., 1950. 296 с.
5. Михлин С. Г. Курс математической физики. М., 1968. 575 с.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. 6-е изд. М., 1974. Т. 4, ч. 1, 335 с.
7. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М., 1972. 824 с.
8. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1965. 424 с.

Дополнительная литература

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М., 1974. 431 с.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в дифракции коротких волн. М., 1972. 456 с.
3. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. М., 1950. 315 с.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 3-е изд. М., 1976. 479 с.
5. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М., 1974. 479 с.
6. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971. 392 с.
7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. М., 1976. 543 с.

8. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., 1964. 830 с.
9. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М., 1965. 408 с.
10. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления. М.; Л., 1935. Т. 1, ч. 1. 148 с.; ч. 2. 400 с.
11. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е изд. М., 1973. 576 с.
12. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М., 1976. 296 с.
13. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М., 1970. 512 с.
14. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977. 383 с.
15. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. 399 с.
16. Полак Л. С. Вариационные принципы механики. М., 1959. 599 с.
17. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд. М., 1969. 384 с.
18. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М., 1971. 567 с.
19. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М., 1959. Т. 5, 655 с.
20. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970. 412 с.
21. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М., 1960. 176 с.
22. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М., 1960. 388 с.
23. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1—2. М., 1969. 622 с.
24. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., 1974. 488 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИБ № 897

Буслаев Владимир Савельевич

Вариационное исчисление

Редактор *З. И. Царькова*
Технический редактор *А. В. Борщева*
Корректоры *Е. К. Терентьева, Н. В. Ермолаева*

Сдано в набор 17.05.79. Подписано в печать 17.12.79. Формат 60×90[1]/[16]. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 18. Уч.-изд. л. 17,2. Тираж 14274 экз. Заказ 242. Цена 75 коп.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова. 199164, Ленинград, В-164, Университетская наб., 7/9.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 8 Ленинградского производственного объединения «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6 с матриц ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского производственно-технического объединения «Печатный Двор» имени А. М. Горького «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

75 коп.

В. С. Буслаев · ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ